

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Уральский государственный педагогический университет»  
Институт математики, физики, информатики и технологий  
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

# ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование»  
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_

дата

подпись

\_\_\_\_\_

оценка

Исполнитель:

Коновалова Алена Сергеевна  
студент МАТ-1501z группы,

Научный руководитель:

Аввакумова И.А.,  
канд. пед. наук, доцент  
кафедры высшей математики и  
методики обучения математике

Екатеринбург 2020

## **Оглавление**

|  |           |
|--|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....  | <b>3</b>  |
| <b>1. ПОНЯТИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ</b> .....  | <b>5</b>  |
| 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОНСТРУКТИВНЫЕ УМЕНИЯ .....   | 5         |
| 1.2. ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ НА УРОКАХ<br>МАТЕМАТИКИ .....  | 14        |
| ВЫВОДЫ ПО МАТЕРИАЛАМ ГЛАВЫ 1 .....   | 24        |
| <b>2. ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ У<br/>ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ<br/>ЗАДАЧ НА УРОКАХ ПЛАНИМЕТРИИ</b> ..... | <b>26</b> |
| 2.1. ТРЕБОВАНИЯ К ЗАДАЧАМ НА ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ У<br>ОБУЧАЮЩИХСЯ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ .....                             | 26        |
| 2.2. КОМПЛЕКТ ЗАДАЧ, НАПРАВЛЕННЫХ НА ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ<br>УМЕНИЙ У ОБУЧАЮЩИХСЯ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ.....                      | 32        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....  | <b>45</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....  | <b>47</b> |

## Введение

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования выпускник средней школы должен владеть метапредметными навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; быть способным и готовым к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания. Также он должен уметь критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников [40].

Также в процессе обучения в предметной области «Математика» у обучающихся, должны быть сформированы: основы логического, алгоритмического и математического мышления; умения применять полученные знания при решении различных задач; представления о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления [40].

При этом предметные результаты освоения базового курса математики должны включать в себя не только владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах, но и умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры, а также выполнять различные построения. Что невозможно без сформированности конструктивных умений обучающихся.

Проблемой формирования конструктивных умений занимались следующие авторы: В.Г. Нечаева, З.В. Лиштван, А. Н. Давидчук, Л. А. Парамонова. Однако большая часть работ посвящена вопросу формирования конструктивных умений у дошкольников и младших школьников. Данной проблемой в основной школе занимались такие авторы, как Коровина В.Г., Тухолко Л.Л. При этом они рассматривали формирование и развитие конструктивных умений в средней школе, построение системы задач, направленной на формирование конструктивных умений. Проблема формирования конструктивных умений

остается открытой, так как одним из требований современных стандартов к результатам обучения является овладение конструктивными умениями.

**Объект исследования:** процесс обучения геометрии в основной школе.

**Предмет исследования:** формирование конструктивных умений у обучающихся в курсе планиметрии.

**Цель исследования:** разработать комплект заданий, направленных на формирование конструктивных умений различных уровней у обучающихся в курсе планиметрии.

На основании цели исследования были поставлены следующие **задачи исследования:**

- 1) Произвести анализ психолого-педагогической, методической литературы и интернет источников, посвященных формированию различных видов конструктивных умений.
- 2) Сформулировать определение понятия конструктивных умений.
- 3) Проанализировать возможности курса планиметрии для формирования конструктивных умений.
- 4) Сформулировать требования к задачам, направленным на формирование конструктивных умений.
- 5) Разработать комплект разноуровневых задач, направленных на формирование конструктивных умений в курсе планиметрии.

# 1. Понятие конструктивных умений

## 1.1. Определение понятия конструктивные умения

Анализ литературы показал, что наиболее часто конструктивные умения встречаются в методической литературе дошкольного образования, где рассматривается понятия конструирование, которое представлено во многих иностранных системах воспитания детей дошкольного возраста (система Ф. Фребеля, «Вальдорфская педагогика», система Л. К. Шлегер и др.) и в отечественной дошкольной педагогике (В. Г. Нечаева, З. В. Лиштван, А. Н. Давидчук, Л. А. Парамонова). Прежде, чем говорить об определении конструктивных умений, необходимо определить более общее понятие «умения».

Непосредственными целями изучения математики является овладение обучающимися системой знаний и усвоение их, определенными способами деятельности и умениями. При этом овладение умениями и способами деятельности происходит на базе усвоения действенных знаний указывающих, как необходимо выполнять то или иное умение или навык.

Основным различием содержания данных понятий В.И. Зыковой положен уровень осознания способа действия. Умения определяют, как способы выполнения действий, основывающиеся на полученных знаниях и требующие полного продумывания всех каждой совершаемой операции, состоящей в действии. Навык – это автоматизированный в результате многократных упражнений способ действия, и поэтому не требующий осознания каждой отдельной операции, входящей в состав действия. Но это не показывает, что человек, действующий на уровне навыка, не осознает совершаемые операции, контроль над их осуществлением происходит постоянно [18].

Некоторые авторы, в том числе и О.Б. Епишева, под умениями понимают возможность производить какое-либо действие, операцию. Согласно их мнению также, умение предшествуют навыку, рассматриваемому как более уверенная стадия овладения действиями. Это понимание понятия «умения» мы используем в дальнейшей работе [17].

В.И. Орлов определил следующие понимания умения: умение – это способность эффективно выполнять действия, умение – это способы выполнения действий, но, в отличие от навыков, они не включают обязательное упражнение; умение – знание в действии; умение – вид деятельности, выполняемой после определенного осмысления; умение – возможность производить какую-либо работу в новых условиях; умение – владение сложной системой психических и практических действий; умение – это элементарное действие, следующее за знаниями. Навык определяется существенно проще: навык – действие, характеризующееся высокой мерой автоматизированной деятельности; навык – укрепленные благодаря упражнению способы действия [28].

Зачастую понятия конструктивных умений и конструирования отождествляют. В источниках встречается определение конструирования «как процесс создания образа предмета труда, который изначально возникает в сознании человека, а затем выражается в схемах, чертежах, описаниях, моделях с целью использования его в производстве» [13, с. 105].

Следуя этому определению, В.А. Далингер выделяет перечисленные этапы процесса конструирования: мысленное представление конструируемого объекта; его схематическое изображение; выполнение необходимых расчетов; материализация конструируемого объекта [13].

Задания, обеспечивающие данный компонент геометрической деятельности, должны быть направлены на совершенствование наглядно-образного и логического мышления, на создание культуры алгоритмической деятельности учащихся и развитие творческих способностей, а также на формирование представлений о участии геометрических понятий в жизни, науке, искусстве и технике.

Действительно, данные понятия имеют тесную взаимосвязь, так как конструирование как создание моделей математических объектов можно отнести к конструктивным умениям.

Конструктивные умения формируются не только во время изучения планиметрии, но и в дошкольном возрасте. Где конструктивные умения понима-

ют, как умение ребенка создавать из каких либо материалов упрощенные модели реальных объектов. Также в этом возрасте формируется умение распознавать геометрические фигуры на изображениях и наоборот: в объектах и их моделях – геометрические тела.

Многие авторы связывают конструктивные умения с задачами на построение. По сути, умение решать такие задачи можно отнести к конструктивным умениям, но решение задач на построение требует от учеников высокого уровня абстракции. При этом уровень пространственного мышления не всегда позволяет им перейти от реальных моделей к их абстрактным понятиям.

К конструктивным умениям будем относить следующие умения, определяемые требованиями Стандарта:

1. умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства. Например, наблюдать симметрию в архитектуре, различать геометрические фигуры в ландшафте и интерьере.

2. умение создавать модели и чертежи, соответствующие заданным критериям и стандартам проекционных чертежей. Такие, как построения при помощи циркуля и линейки, развертки геометрических тел и плоские модели фигур из бумаги.

3. умение интерпретировать графическую информацию. Например, в задачах, где часть условий, необходимых для решения, отображена только на чертеже.

4. умение решать задачи, требующие графической интерпретации условий. Когда чертеж требует дополнительного построения или другого преобразования.

Формирование первого умения происходит ещё в дошкольном возрасте, но мы также будем рассматривать его формирование. Так как обучающиеся усваивают точные определения фигур и их свойства именно в процессе изучения математики.

Программа изучения геометрии в школе, объединяет в своём составе строгую логику и возможности для воображения, открывает простор для раз-

вития образного и логического мышления. В ходе изучения планиметрии, учащиеся усваивают диалектику науки, а также особенности своего «математического мышления». Такому симбиозу помогает объединение в курсе геометрии содержательно-методических линий, которые поддерживают модель структуры мыслительной деятельности в геометрической области, разработанную Г.Д. Глейзером, и содержащую символический, интуитивный, метрический, пространственный, конструктивный и логический компоненты умственной деятельности [9].

Каждая из указанных линий обеспечивает совершенствование конкретного компонента умственной деятельности:

- линия формирования геометрических образов;
- линия математического языка и логики;
- метрическая линия;
- линия развития геометрической интуиции,
- конструктивная линия.

Связи между этими линиями наблюдаются при решении задач, которые образуют в рамках перечисленных линий системы, в том числе и конструктивной. Например, в процессе решения задачи с целью нахождения геометрических мест точек ученики производят исследовательскую деятельность, демонстрируя логический стиль мышления или интуицию и богатое воображение в зависимости типа их особенностей. Если обучающийся – логик, зрительный образ строится только на завершающем этапе работы с задачей, уже после проведенных рассуждений и получения аналитического представления характеристических свойств нужной фигуры; когда обучающийся интуитивист, зрительный образ возникает изначально, а в дальнейшем уточняется и корректируется, и получает подтверждение логическими выводами.

Проанализировав литературу, и требования Стандарта, сформулируем следующее определение:

конструктивные умения – это умения, создавать модели, интерпретировать и использовать графическую информацию для решения математических задач.

Компонент умственной деятельности, характеризующий конструктивные умения, содержит:

- умение идентифицировать геометрические фигуры на чертежах и моделях;

- умение верно изображать геометрические фигуры;

- умение анализировать геометрические образы;

- умение синтезировать геометрические образы;

- умение определять множества точек, соответствующие определенным условиям;

- умение представлять фигуры как множества точек, обладающих определенными свойствами;

- умение выполнять геометрические построения;

- умение моделировать;

- умение определять геометрические понятия конструктивным методом;

- доказывать или опровергать утверждения конструктивным методом.

Задания, которые обеспечивают этот компонент геометрической деятельности, нацелены на совершенствование логического и нагляднообразного мышления, на построение культуры алгоритмов у учащихся и развитие их творческих способностей, а также на понимание участия в жизни, науке, технике и искусстве.

При этом важно, что практические задания, содержащие различные аспекты деятельности: а) влияют на развитие умений и навыков владения чертёжными инструментами (линейкой, циркулем, транспортиром, чертежным треугольником); б) демонстрируют на практике значение аксиом, теорем, определений; в) способствуют формированию основных геометрических понятий; г) формируют базу для определения понятий, поясняют необходимость доказательства различных теорем, д) дают возможность продемонстрировать

развитие геометрических понятий; е) способствуют закреплению изученного материала.

Рассмотрим каждый из указанных аспектов более подробно.

а) Выработка конструктивных умений и навыков.

Освоение планиметрии в школьном курсе не возможно без участия рисунков и чертежей, даже при дедуктивном способе построения курса. Изображения фигур способствуют пониманию содержания геометрических понятий и демонстрации связей между ними. Для этого обучающихся нужно научить выполнять самостоятельно геометрические чертежи, а не только читать их. Ещё на начальной ступени школьного образования обучающиеся осваивают изображение примитивных геометрических фигур, в 5-6 классах начинается процесс формирования умений, необходимых для основных геометрических построений с использованием циркуля и линейки. В дальнейшем эти умения развиваются до уровня навыков при помощи практических заданий. В качестве примера приведём следующее задание. Изобразите следующие треугольник: а) у которого есть ось симметрии; б) у которого отсутствует ось симметрии, но который можно разделить на два других треугольника, имеющие ось симметрии.

Конструктивные умения и навыки применяются и при изучении алгебры (особенно при построении и чтении графиков функций), физики и технологии. В этих дисциплинах для решения графических заданий, обучающимся необходимо владеть навыками выполнения основных геометрических построений, измерения отрезков и углов. Соответствующие умения и навыки также формируются и прорабатываются в процессе изучения черчения. Однако, курс черчения в школе сейчас является не обязательным и начинается, как правило позже курса планиметрии. Учитывая сложившуюся ситуацию, нужно учитывать, что основная нагрузка по формированию конструктивных умений приходится на изучение планиметрии и стереометрии. Кроме этого, регулярное использование чертежных инструментов способствует рационализации процесса построения, которая может применяться в любых других видах деятель-

ности. «Без выработанных навыков дальнейшее продвижение вперед невозможно» [23, с.5].

б) Иллюстрация значения аксиом, теорем, определений.

Возможность продемонстрировать содержание значительной части аксиом и теорем возникает при разборе практических заданий, связанных с ними. В качестве примера, одна из основных аксиом, разбираемая в курсе планиметрии – это аксиома прямой: через любые две точки проходит прямая и притом только одна. На практике обучающиеся имеют возможность проверить справедливость каждого из двух утверждений аксиомы. При этом ситуация складывается иначе при изучении аксиомы измерения углов: «Каждый угол имеет определенную градусную меру, больше нуля. Развернутый угол равен  $180^\circ$ . Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами». Невозможно подтвердить на практике два первых утверждения этой аксиомы, но, выполнив необходимые построения и измерения, возможно убедиться в справедливости последнего. Иногда практические задания служат и для понимания содержания некоторых утверждений, а не только для иллюстрации теоретических положений. Без решения соответствующих заданий, семикласснику будет затруднительно освоить понимание сути аксиомы разбиения плоскости на две полуплоскости: «Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой». Однако выполнение заданий, затрагивающих каждую отдельную часть аксиомы, достаточно просто и решается даже не самого способного ученика. Выполняя чертёж, обучающиеся поймут и усвоят аксиому осознанно. Таким же способом можно прорабатывать теоремы, их доказательства и определения понятий.

в) Формирование геометрических понятий.

Практические задания должны иметь широкое применение, когда идет процесс формирования важных геометрических понятий, особенно в начале

изучения систематического курса планиметрии. Можно объяснить это тем, что изначально отсутствует необходимая теоретическая база для решения задач на вычисление, доказательство и особенно на построение, только практические задания не вызовут затруднений у обучающихся. Ещё один довод в пользу этих заданий состоит в том, что они позволяют осознанно понимать и запоминать основные положения геометрии: аксиомы, теоремы и определения. В процессе выполнения таких заданий возникает необходимость интерпретации текстовых условий в рисунки и чертежи. Воспринимая утверждения об объектах, указанных в задании, обучающиеся переводят их в рисунки практически сразу. Воспроизведенные чертеж или рисунок дает возможность наблюдать свойства и взаимное расположение геометрических объектов. Примером могут служить рисунки, выполняемые обучающимися в процессе изучения теоремы о точке пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, эта теорема позволяет наблюдать вариативность расположения ортоцентра треугольника относительно его самого. Элемент исследования в подобном практическом задании способствует пониманию важности каждого отдельного слова в формулировке, конкретно, почему в теореме говорится о прямых, содержащих высоты, а не о самих высотах. В таком случае наглядная форма представления материала проще для усвоения, нежели абстрактная теоретическая формулировка сложная для понимания. Однако встречаются ситуации и проще. Например, при изучении темы "Взаимное расположение точек и прямых" нужно рассмотреть изображение точек и прямых, их обозначение; изображение точек, принадлежащих данной прямой, а также точек не принадлежащих той же прямой. Обучающиеся должны спокойно демонстрировать на изображении пересекающиеся и непересекающиеся прямые, и самостоятельно изображать такие прямые, используя линейку устанавливать принадлежность нескольких точек одной прямой. Отсутствие перечисленных навыков не позволит обучающимся прочитать готовый чертёж на взаимное расположение точек и прямых. Практические задания дают возможность развивать геометри-

ческое видение и помогают осознать, что геометрические понятия, их свойства являются отражениями объектов реального мира и их отношений.

г) Введение новых понятий.

При формировании базы для введения нового понятия, подведения обучающихся к осознанию необходимости доказательства математического утверждения практические задания служат в качестве простых экспериментов. Их выполнение приводит учеников к мысли о существовании некоторых понятий, высказыванию гипотез о свойствах уже изображенных фигур, и об их взаимном расположении, если фигур несколько. Высказанные гипотезы могут либо быть теоретически обоснованы (возможно, не сразу, а значительно позднее), или же опровергнуты. Ж. Пиаже одобрял такие задания: «все знание ребенка предполагает эксперимент для своего существования» [31, с.30]. И ещё: «Обращение к эксперименту не компрометирует ни в чем высшую дедуктивную строгость, но наоборот, подготавливает ее, создавая ей реальную базу». Такое возможно из-за того, что формирование геометрических понятий, как правило, начинается созерцанием конкретного, с долгосрочным, глубоким и всесторонним изучением конкретных реальных объектов. Таким образом, для формирования понятия параллелограмма нужно, чтобы обучающиеся уже владели следующими понятиями: четырехугольник, выпуклый четырехугольник, что достигается с помощью выполнения практических заданий, обрабатывающих основополагающие свойства этих понятий. Важно установить основные свойства параллелограмма опытным путём, а уже впоследствии доказаны. Аналогично стоит поступать и о признаках параллелограмма. При выполнении практических заданий выдвигаются гипотезы о свойствах и признаках только изображаемых фигур, но будут ли эти гипотезы выполняться для остальных фигур, которые не были изображены – уже не ясно. Из этого следует необходимость доказательства. Такой предварительный эксперимент позволяет проводить подавляющее большинство теорем школьного курса планиметрии.

д) Развитие геометрических понятий.

Возможность понять процесс развития большинства геометрических понятий достигается выполнением практических заданий, связанных с ними. Примером такого процесса может выступить понятие «треугольник». Он является одной из примитивных фигур, образованной из трех точек и трех отрезков, но только в начале изучения планиметрии, а к завершению курса становится одним из важнейших понятий во всём курсе геометрии, богатое содержание которого связано с каждым из разделов школьной геометрии. При решении таких практических заданий, иллюстрирующих расширение содержания теоретического наполнения курса, необходимо ориентироваться на уровень развития познавательного интереса обучающихся.

Таким образом, подавляющая часть конструктивных умений более полно формируется в процессе изучения курса школьной геометрии, а основа закладывается во время изучения планиметрии в средней школе. А далее опишем процесс формирования конструктивных умений.

### ***1.2. Формирование конструктивных умений у обучающихся на уроках математики***

Описывая процесс формирования умений, как правило, выделяют этапы изменения их психологической структуры. Для первого этапа характерны осознание цели действия и поиск способов его выполнения через пробы и ошибки; для второго – владение знаниями от способах выполнения действий и использование ранее приобретенных конкретных навыков; на третьем этапе происходит формирование отдельных общих учебных умений, касающихся планирования деятельности; четвертый характеризуется возможностью творческого применения знаний и навыков с осознанием цели и мотива выбора способа ее достижения; пятый этап – это творческое использование различных умений или мастерство [30].

После рассмотрения понятий «умение» и «навык» с общедидактической точки зрения, обратим внимание на геометрические умения. Существовая как часть общей культуры, геометрия представляет собой органичное сочетание строгой логики рассуждений и конкретных наглядных представлений. В по-

строении школьного курса геометрии отражена история развития геометрии как науки. Создание всех условий, позволяющих усваивать учебный материал на каждом из трех уровней обучения: гуманитарном (общеобразовательном), прикладном и логическом (углубленном), является основной задачей учителей и авторов учебной литературы [20]. Опорой этому служит распределение акцентов на компонентах умственной деятельности в области геометрии, которые были предложены Г.Д. Глейзером [9]. Основой для современной конструкторской и технической деятельности являются геометрические фигуры и их свойства, изучаемые в курсе планиметрии. Также они находят широкое применение и в смежных учебных дисциплинах, и в дальнейшей практической деятельности обучающихся старших классов и профессиональных учебных организаций.

Процесс решения любой геометрической задачи начинается с построения геометрической фигуры, заданной условием. Педагогу необходимо создать условия для формирования у обучающихся соответствующего конструктивного умения, которое связано с осуществлением аналитико-синтетической деятельности. Для этого на чертеже или рисунке должны быть просматриваемы связи между отдельными геометрическими элементами и фигурами. Зачастую для построения чертежа при решении задачи необходима не одна попытка, так как нужно учитывать каждую из особенностей данных геометрических образов.

О.Б. Епишева, основываясь на деятельностном подходе, выделяет следующие уровни сформированности приемов учебной деятельности:

I уровень – ситуативное механическое использование готовых (частных) приемов учебной деятельности с помощью извне.

II уровень – самостоятельное использование готовых частных приемов в стандартных ситуациях и по образцу. Неадекватный перенос в новые ситуации.

III уровень – самостоятельное использование обобщенных приемов в измененных (нестандартных) ситуациях, адекватный перенос в новые ситуации [17].

В соответствии с данной классификацией, выделим три уровня сформированности различных конструктивных умений у обучающихся.

Нужно отметить также, что в начальной школе происходит формирование данных умений на пропедевтическом уровне. Обучающиеся осваивают простейшие изображения на плоскости и разделяют простейшие фигуры на составляющие. Поэтому, мы не рассматриваем 0 уровень сформированности учебных действий, который определяет отсутствие приемов и непонимание их состава, а также отсутствие желания учиться.

Выделим уровни усвоения приемов учебной деятельности для различных видов конструктивных умений.

#### **I уровень – начальный**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире основные геометрические фигуры;
- создает простейшие модели и чертежи;
- решает простейшие задачи, требующие графической интерпретации условий только по алгоритмам или с помощью учителя.

#### **II уровень – базовый**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства;
- интерпретирует графическую информацию;
- самостоятельно создает модели и чертежи;
- решает задачи, требующие графической интерпретации данных используя алгоритмы и приемы решения.

#### **III уровень – продвинутый**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры, их сечения, оси симметрии и другие характеристики фигур;

- интерпретирует различные виды информации в графическую и обратно;
- самостоятельно решает нестандартные задачи, требующие представления моделей в абстрактной форме.

Для формирования соответствующих уровней умений необходимы соответствующие типы задач. Приведём типы задач, формирующие различные конструктивные умения на трех уровнях. Для этого рассмотрим таблицу №1, где каждому виду конструктивных умений ставятся в соответствие три типа заданий различных уровней.

**Таблица №1. Уровни заданий для формирования различных видов конструктивных умений.**

| Виды умений   | Задания I уровня  | Задания II уровня  | Задания III уровня   |
|---|---|--|--|
| Умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства. | Перечислить геометрические фигуры, присутствующие на рисунке (модели, фотографии, чертеже).<br><br>Привести примеры реальных предметов, которые являются моделями геометрических фигур. | Привести примеры проявления свойств геометрических фигур из различных предметных областей (биология, физика, архитектура, живопись). | Определить, где на реальном объекте находятся оси симметрии. Изобразить сечение представленного объекта по заданной плоскости. |
| Умение создавать модели и чертежи, соответ-   | Построить модель простой геометрической   | Построить модель фигуры в соответствии со  | Построить модель сложной объемной фигу-  |

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| <p>ствующие заданным критериям и стандартам проекционных чертежей.</p> | <p>фигуры по готовому алгоритму.</p> <p>Определить, является ли данный чертеж проекционным.</p>                                  | <p>стандартами проекционных чертежей.</p> <p>Найти ошибки на данном чертеже, предложить способ их исправления.</p> <p>Построить развертку модели простой геометрической фигуры.</p> | <p>ры в трёх различных проекциях в соответствии со стандартами проекционных чертежей.</p> <p>Найти ошибки на данном чертеже и определить, какое требование к проекционному чертежу они нарушают.</p> <p>Построить три вариации развертки модели заданной фигуры.</p> |
| <p>Умение интерпретировать графическую информацию.</p>                 | <p>Выполнить описание фигуры, данной на чертеже, перечислив все известные данные.</p> <p>Построить не ортогональную проекцию</p> | <p>Выполнить описание фигуры, найдя все неизвестные данные.</p> <p>Построить ортогональную проекцию фигуры, изображен-</p>  | <p>По трем ортогональным проекциям построить изометрический чертеж данной фигуры.</p> <p>Построить три проекции сложной объем-</p>   |

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
|  | данной плоской фигуры.<br>Определить распределение данных объектов по диаграмме.  | ной на изометрическом чертеже.   | ной фигуры.   |
| Умение решать задачи, требующие графической интерпретации условий. | Решить задачу, требующую построения простого чертежа по образцу.<br>Решить задачу на построение по заданному алгоритму. | Решить задачу, требующую построение чертежа.<br>Решить задачу на построение.<br>Построить диаграмму распределения данных, заданных в виде таблицы. | Решить задачу с построением чертежа объемной фигуры или дополнительным построением на плоском чертеже плоской фигуры. |

Таким образом, для формирования всех видов конструктивных умений различных уровней необходимо использовать задания, требующие различного уровня развития абстрактного мышления.

Приведём примеры задач различных уровней, направленных на формирование умения графически интерпретировать данные условия.

Задачи первого уровня требуют от обучающихся выполнения либо уже известного перечня действий, либо предлагают новый алгоритм решения. Рассмотрим формирование умения интерпретировать информацию в следующей задаче.

**Задача 1.** Точки А, В, С и D лежат на одной прямой.  $AC = 1,3\text{см}$ ,  $BC = 2,4\text{см}$  и  $BD = 3\text{ см}$ . Найдите длину отрезка AD.

Условия этой задачи отображают алгоритм её решения:

1. построить прямую и отметить на ней первую точку А;
2. отложить от точки А отрезок АС;
3. отложить на прямой отрезок ВС от точки С, здесь подразумевается вариативность, которую обучающиеся должны обнаружить;
4. отложить от точки В (от каждого из двух вариантов) отрезок AD, здесь тоже есть возможность отложить длину отрезка в обе стороны;
5. вычислить длину каждого из возможных четырёх искомых отрезков.

На третьем этапе у обучающихся возникает вопрос, в какую сторону откладывать длину отрезка ВС. Такие вопросы приводят учеников к повторному обращению к условиям задачи и поиску уточняющих условий. Если такого условия не выявлено, они отображают на чертеже оба варианта. Однако для этого обучающимся необходимо заранее изъяснить, что существуют задания, где возможно несколько решений, чтобы они не считали это ошибкой. В данной задаче так же можно выделить связь с комбинаторикой, заключающуюся в вычислении количества вариантов решения.

Для второго уровня формирования умения трансформировать условия в графический материал необходимо самостоятельное выполнение чертежей. Например, в практических задачах на построение искомой фигуры, таких как задача 2.

**Задача 2.** Хозяйка, приведя козу на пастбище, вбила два колышка на расстоянии 10 м один от другого, натянула между колышками веревку с кольцом так, что кольцо может скользить от колышка к колышку, а к кольцу веревкой длиной 5 м привязала козу. Нарисуйте фигуру, состоящую из точек, до которых может добраться коза.

В данной задаче обучающимся необходимо интерпретировать практические явления в геометрические, а затем изобразить их на чертеже: веревка, натянутая между двумя колышками – отрезок, кольцо на этой веревке – все точки, принадлежащие этому отрезку, веревка заданной длины – расстояние и

радиус. При успешном переводе условий, построение чертежа уже не вызовет затруднений:

1. построение отрезка;
2. построение параллельных отрезков, на заданном расстоянии, равных построенному;
3. построение полуокружностей с данным радиусом с центрами в концах данного отрезка;
4. вывод о контуре фигуры и включение всех точек внутри полученного контура.

Так как в данной работе рассматривается формирование конструктивных в курсе планиметрии, следует рассмотреть в качестве примера задачи третьего уровня, задачу, требующую дополнительных построений.

**Задача 3.** Медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части (рис. 1). Найти углы треугольника.

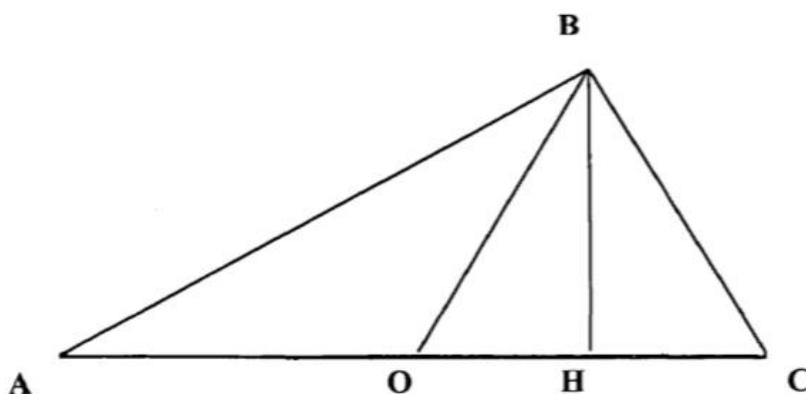


Рис. 1

Для учащихся данная задача является эвристической, т.к. способ ее решения им неизвестен. Наличие в условии трех равных углов может привести к необходимости рассмотрения трех равных треугольников, элементами которых и будут эти углы. Но на рисунке 15 явно представлены только два треугольника:  $\triangle BСН$  и  $\triangle ВОН$ . Для получения третьего треугольника требуется выполнить дополнительные построения: провести перпендикуляр из точки  $O$  к прямой  $AB$  (рис. 2).

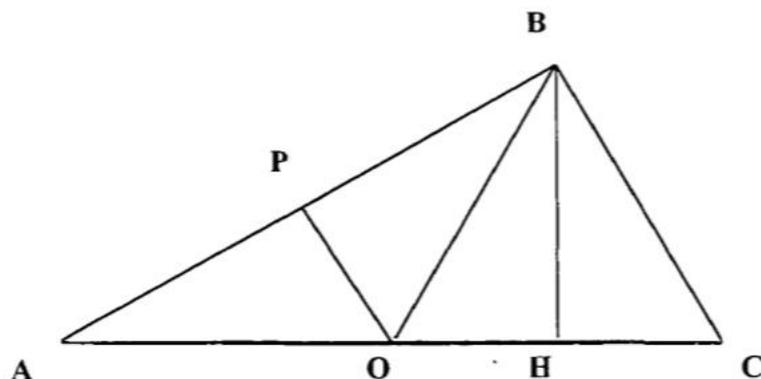


Рис. 2

Доказательство равенства треугольников  $\triangle BHC = \triangle BHO = \triangle BPO$  опирается на соответствующие признаки равенства прямоугольных треугольников.

Но для нахождения градусных мер углов данного треугольника получившуюся конфигурацию необходимо переосмыслить, т.е. мысленно переконструировать и вычленить на рисунке 2 угол НВА (угол НВР) и доказать, что углы НВА и АОР равны, но уже не как соответствующие углы равных треугольников, а как углы с соответственно перпендикулярными сторонами ( $OA \perp BH$ ,  $OP \perp BA$ ).

Критериями оценки уровня овладения умения обучающимися могут служить:

- полнота выполняемых операций, которые составляют само действие в целом;
- рациональность последовательности, осознанность действий в целом;
- степень обобщенности умения;
- сложность производимых мыслительных операций.

Процесс решения задач развивает пространственное воображение обучающихся путём формирования целостного образа геометрической фигуры, оперированием этим образом в поэтапно усложняющихся условиях, и подводя к творческому конструированию новых образов и отношений. Так формируются представления о понятии подобия треугольников, путём создания образов подобных треугольников, доказательства подобия двух треугольников,

изолированных друг от друга, построения треугольника, подобного данному, и свободного использования данного образа в обстоятельствах, изначально отличных от указанного отношения между треугольниками. Например, в теореме Птолемея, о пропорциональных отрезках в круге, в формулировке отсутствуют термины, связанные с отношением подобия фигур, которое используется при доказательстве. Результатом решения конструктивных задач является создание возможностей для абстрактного представления геометрических фигур, как множеств всех точек, обладающих данными свойствами. Обучающиеся могут определять прямую, как множество всех точек, равноудаленных от двух данных точек; или как множество всех точек вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание; как множество центров окружностей, проходящих через две данные точки; как множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом; как множество всех точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная, а окружность как множество всех точек, отстоящих от данной точки на данном расстоянии; как множество середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности, и т.д. Сочетание перечисленных подходов в оптимальном их применении обогащает геометрические образы, вводимые в школьном курсе планиметрии, и расширяют возможные пути решения прикладных задач. Наиболее успешно это может применяться в классах с углубленным изучением математики.

## ***Выводы по материалам главы 1***

1) Анализ литературных источников по теме исследования позволил уточнить понятие «что-то там такое». В рамках настоящего исследования принимается следующее определение: конструктивные умения – это умения, создавать модели, интерпретировать и использовать графическую информацию для решения математических задач. К конструктивным умениям будем относить следующие умения, определяемые требованиями Стандарта:

1. умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства;
2. умение создавать модели и чертежи, соответствующие заданным критериям и стандартам проекционных чертежей;
3. умение интерпретировать графическую информацию;
4. умение решать задачи, требующие графической интерпретации условий.

Выделены уровни заданий для формирования конструктивных умений у обучающихся в курсе планиметрии.

### **I уровень – начальный**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире основные геометрические фигуры;
- создает простейшие модели и чертежи;
- решает простейшие задачи, требующие графической интерпретации условий только по алгоритмам или с помощью учителя.

### **II уровень – базовый**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства;
- интерпретирует графическую информацию;
- самостоятельно создает модели и чертежи;
- решает задачи, требующие графической интерпретации данных используя алгоритмы и приемы решения.

### **III уровень – продвинутый**

- Распознает на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры, их сечения, оси симметрии и другие характеристики фигур;
- интерпретирует различные виды информации в графическую и обратно;
- самостоятельно решает нестандартные задачи, требующие представления моделей в абстрактной форме.

Приведены в соответствие типы задач и уровни формирования конструктивных умений обучающихся в таблице 1.

## **2. Формирование конструктивных умений у обучающихся в процессе решения геометрических задач на уроках планиметрии**

### ***2.1. Требования к задачам на формирование конструктивных умений у обучающихся в курсе планиметрии***

В соответствии с ФГОС (в виду компетенций) необходимо научиться грамотно составлять и отбирать задачи, которые смогли бы сформировать у обучающихся 7-9 классов конструктивные умения. А для того, чтобы осуществить грамотный отбор, необходимо сформулировать перечень требований к таким задачам.

Важное значение имеет то, что для формирования конструктивных умений, как и для других видов умений, задачи должны предлагаться различных видов. Если обучающиеся научатся решать только один тип задач, это не сформирует у них конструктивные умения. Для полноценного формирования умений необходимо использовать систему задач, которая в полной мере будет покрывать все аспекты учебных умений. С точки зрения З.П. Мотовой в системе задач должны содержаться следующие виды задач:

1. Материализованные задачи, раскрывающие пространственные представления об определенном множестве объектов.
2. Задачи, приводящие к кодированию, то есть выявляющие существенные свойства объектов данного множества.
3. Кодированные задачи, в ходе решения которых формулируется определение понятия.
4. Логико-систематизирующие задачи, шлифующие определения до степени «необходимо и достаточно».
5. Логические задачи, дающие возможность учащимся представить логическое построение понятия и системы понятия.
6. Декодированные задачи, задачи существования множества объектов, охарактеризованных сформулированным определением.

Формирование геометрического понятия, как процесса в рамках теории поэтапного формирования учебных действий находится под пристальным вниманием автора.

Но перед этим важно привести виды задач, которые влияют на формирование умений и навыков, входящих в конструирование. Как говорилось выше, одним из главных средств формирования конструктивных умений выступают именно задачи. В зависимости от планируемого результата решения задач их разделяют на следующие виды:

1. Задачи, целью выполнения которых является изображение соответствующего геометрического образа.

Например: нарисуйте два неравных четырехугольника, которые можно разрезать на два соответственно равных треугольника.

2. Классические задачи на построение при помощи линейки и циркуля.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: На плоскости расположены две равные касающиеся окружности. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся обеих данных окружностей.

3. Задачи, для решения которых требуются дополнительные построения, направленные на получение вспомогательной геометрической фигуры, свойства которой облегчат решение поставленной задачи. Или коротко, задачи на доконструирование.

Примером такой задачи может служить: дан угол и внутри него точка А. Найдите на одной стороне угла точку М, а на другой - точку N, чтобы длина ломаной AMN была наименьшей.

4. Задачи на замену искомой геометрической фигуры более простой, содержащей ту же искомую величину, что и искомая фигура, а также задачи на деление и перекраивание фигур, или на переконструирование.

В качестве примера: Разделите квадрат, изображенный на рисунке 3, на четыре равные фигуры, проведя две прямые. Сколько способов для этого существует?

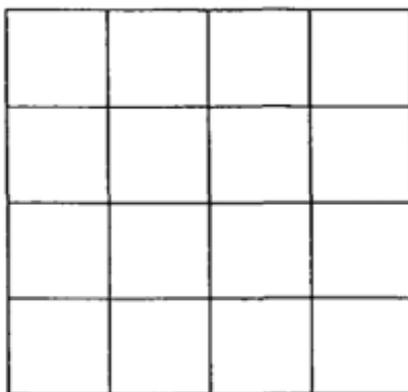


Рис. 3

5. Задачи, для решения которых на сложном чертеже отделяется простая геометрическая фигура, при этом остальные объекты на чертеже не принимаются во внимание. Такие задачи называют задачами на деконструирование.

Пример такой задачи: Нарисуйте квадрат. Отметьте девять точек: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Из всех ломаных, которые соединяют две противоположные вершины квадрата, выберите те, звенья которых идут по сторонам квадрата или параллельны им. Сколько таких ломаных можно провести? Какая из них проходит через все девять точек? Сколько у нее звеньев? А сможете ли вы провести такую ломаную, которая проходит через все девять точек и состоит всего из четырех звеньев?

6. Задачи на реконструирование, или на восстановление геометрической фигуры по некоторым ее элементам, например, задача на восстановление пятиугольника по серединам его сторон.

Сформулируем требования к задачам, нацеленным на формирование конструктивных умений обучающихся. Начать нужно с того, что совокупность задач является системой, когда соответствует следующим методическим требованиям (согласно О.А. Лисимовой), которые можно разделить на группы:

1) Требования к содержанию задач на конструировании:

- Предполагаемый результат решения задачи должен соответствовать одному из выделенных выше видов конструктивных задач.
  - Наличие в задаче опоры на теоретический материал курса планиметрии в основной школе.
  - Применение нестандартных формулировок, практическая ориентация задач.
  - Возможен дефицит, избыток или противоречивость данных.
- 2) Требования к видам деятельности:
- Использование конструктивных задач всех типов
  - Наличие заданий, где требуется составить задачи самостоятельно.
- 3) Требования к формулировке конструктивных задач и организации их в систему:
- Организация ряда конструктивных задач в качестве последовательных целевых указаний к определенному виду деятельности и установки на процессе ее осуществления: «рассмотрите...», «измерьте...», и т.д.
  - Присутствие нескольких подзадач, связанных с конкретной ситуацией
  - Нестандартные формулировки нескольких задач
  - Три блока конструктивных задач, зависимо от их сложности и учебных функций (Таблица № 2).

Таблица № 2

Блоки конструктивных задач

| Блок А   | Блок Б   | Блок В   |
|--|--|--|
| Задачи, нацеленные на формирование понятий и исследование свойств, рассчитаны на самостоятельный поиск способов выполнения построений, со- | Задачи, для формирования умений осуществлять перенос полученных знаний и приемов построений в новые условия, переконструирование имеющихся способов действий или со- | Задачи, использующие умение переносить и переконструировать умения в измененных условиях, творческого подхода, догадки.<br>(Можно использовать |

|  |  |  |
|--|--|--|
| <p>ставление соответствующих алгоритмов, а также упражнения на первичное применение усвоенных знаний и приемов построения.</p> | <p>знание новых, выбор рациональных приемов конструктивных действий.</p> | <p>задачи с повышенным уровнем сложности).</p> |
|--|--|--|

Зачастую решение геометрических задач требует дополнительных построений, без которых выполнить решение невозможно. И.П. Калошиной и Н.А. Добровольской [92] был разработан обобщенный нормативный состав действий, которые выполняются при решении задачи. Разделение всех действий происходит в соответствии с двумя типами дополнительных построений: прикладных и фундаментальных.

В каждую часть входят по пять групп действий, которые соответствуют основным группам действий в структурном анализе деятельности:

I. Выявление компонентов деятельности, которые служат в качестве предметно-специфических явлений, включенных в условие творческой задачи.

II. Определение среди них известных и неизвестных.

III. Установление способов нахождения неизвестных компонентов деятельности при построении взаимосвязей среди ее компонентов.

IV. Выделение инвариантных элементов структуры известных компонентов деятельности данной области или определение показателей, которые их характеризуют.

V. Выявление показателей, основанное на взаимосвязях между компонентами деятельности, по которым следует характеризовать структурные элементы неизвестных компонентов деятельности.

Перечисленные группы включают соответствующие действия. В качестве примеров, следующие действия можно отнести к первой группе:

- 1) определение цели деятельности или требований к конечному результату;
- 2) выделение предмета деятельности;

3) выявление способов деятельности и т.д.

В каждом разделе содержится три цикла действий:

- A. Определение необходимости дополнительных построений (основных, вспомогательных, переходных).
- B. Выполнение дополнительных построений (основных, вспомогательных, переходных).
- C. Использование дополнительных построений (основных, вспомогательных, переходных) для решения задачи и их корректировка.
  - 1. Выяснение количества необходимых дополнительных построений.
  - 2. Понимание конкретного предметно-специфического содержания дополнительных построений.
  - 3. Выделение взаимосвязей между дополнительными построениями и с уже имеющихся объектов. Иногда действия могут состоять из микродействий.

Так в действии по открытию конкретного предметно-специфического содержания дополнительных построений содержатся микродействия, перечисленные ниже:

- a) установление образа дополнительных построений;
- b) выявление элементов, из которых он состоит;
- c) определение размеров элементов.

Дополнительные построения определяют как введение в задачу новых данных, которые не исходят из каких положений, входящих в соответствующую предметную область. Смысл фундаментальных дополнительных построений заключается в выявлении показателей, детерминирующих добавление в условие задачи новых данных, которые не обусловлены теоретическими положениями соответствующей предметной области, а также в нахождении новых данных, обобщающих характеристики для той или иной области. По сути они имеют логический характер. Выявление фундаментальных дополнительных построений происходит на основе анализа. Прикладные дополнительные построения охарактеризованы установлением конкретного характера (количества, содержания и взаимосвязей) новых данных, необходимых для дополне-

ния условия той или иной конкретной задачи и вытекающие ни из каких теоретических положений данной области. В качестве главной ориентировочной основы для реализации этих действий служат, во-первых, положения по структурному анализу деятельности, использованные при обработке умений, основывающихся механизм дополнительных построений; во-вторых, положения по предметно-специфическим знаниям и умениям.

### ***2.2.Комплект задач, направленных на формирование конструктивных умений у обучающихся в курсе планиметрии***

Основываясь на положениях первой главы и пункте 2.1 данной работы, разработан комплект заданий, направленных на формирование конструктивных умений у обучающихся в процессе планиметрии. В предложенный комплект входят задания из школьного курса планиметрии. Задания распределены в соответствии с блоками конструктивных задач, обозначенных в пункте 2.1 в таблице 2.

К блоку А относятся задачи, нацеленные на формирование понятий и исследование свойств, рассчитанные на самостоятельный поиск способов выполнения построений, составление соответствующих алгоритмов, а также упражнения на первичное применение усвоенных знаний и приемов построения. Что соответствует первому уровню сформированности конструктивных умений.

1. Слева на рисунке 4 изображен четырехугольник. Начертив внутри него несколько линий, можно получить изображение треугольной или четырехугольной пирамиды.

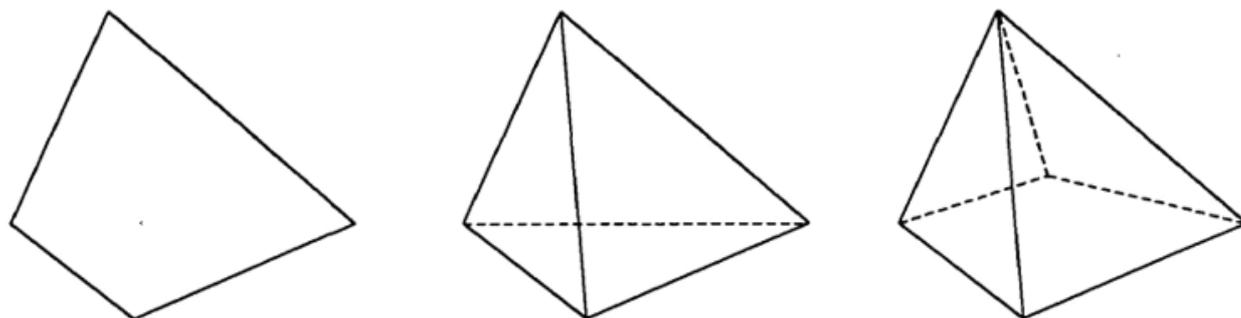


Рис. 4

2. Проведя несколько линий в нарисованных многоугольниках, получи-

те изображения многогранников.

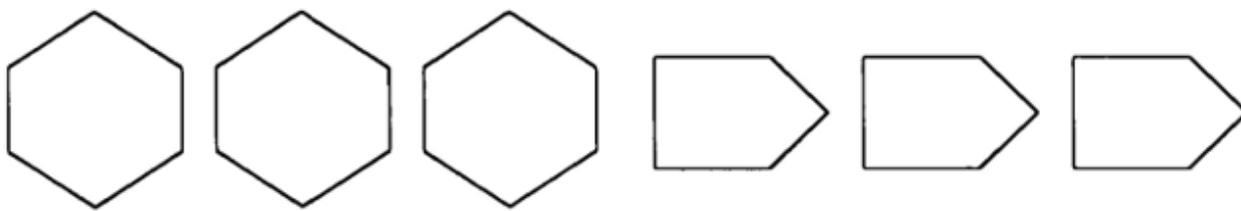


Рис. 5

3. Разделите квадрат, изображенный на рисунке 6, на четыре равные фигуры, проведя две прямые. Сколько способов для этого существует?

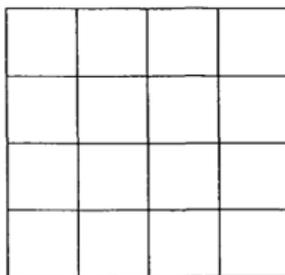


Рис. 6

4. Изобразите два различных четырехугольника, которые можно разделить на два соответственно равных треугольника.
5. На рисунке 7 изображена шестизвенная замкнутая ломаная, которая пересекает каждую из своих сторон ровно один раз. Нарисуйте десятизвенную ломаную, обладающую таким же свойством.

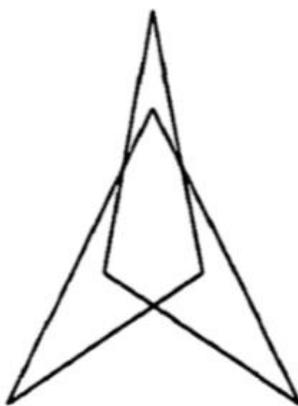


Рис. 7

6. Четыре государства имеют форму треугольников. Как располагаются эти страны одна относительно другой, если каждая из них имеет общие границы со всеми остальными?

7. Разделите фигуру с рисунка 8 на четыре части равные между собой.

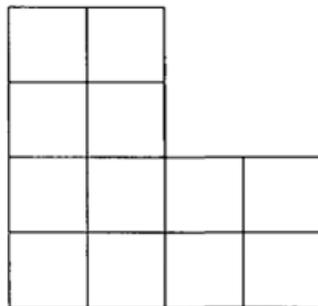


Рис. 8

8. На прямой расположены точки А, В, С и D. Какую длину может иметь отрезок AD, если:
- а)  $AB = 1,2$ ;  $BC = 1,4$ ;  $CD = 1,7$ ;
  - б)  $AB = 2,1$ ;  $BC = 1,8$ ;  $CD = 2,3$ ;
  - в)  $AC = 1,3$ ;  $BC = 2,4$ ;  $BD = 3$ ?
9. Дан квадрат со стороной 5. Обозначьте геометрическое место точек принадлежащих сторонам квадрата, каждая из которых удалена от ближайшей вершины квадрата не более чем на 2.
10. На плоскости расположены две равные касающиеся окружности. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся обеих данных окружностей.
11. Сизифу необходимо закатить камень на вершину горы. В день он продвигается на 150 метров, но каждую ночь камень скатывается вниз на 100м. Сколько дней потребует Сизифу, чтобы камень доставить камень до вершины, если высота горы 2020 м?
12. На сколько частей возможно разделить плоскость: а) двумя прямыми; б) тремя прямыми; в) четырьмя прямыми?
13. На сколько частей три прямые могут разделить плоскость, проходящие через одну точку? А четыре прямые? А n прямых? Сколько нужно прямых, чтобы разделить плоскость на 566 частей?
14. На сколько частей три луча могут разбить плоскость?

15. Четыре точки лежат на одной прямой. Из каждой из них выходит луч, все четыре луча лежат в одной полуплоскости. На сколько частей могут разделить эту полуплоскость проведенные лучи? Нарисуйте все возможные случаи.
16. Получится ли из одного отрезка проволоки, не разрезая его, построить каркас правильного тетраэдра? Сколько изгибов нужно сделать на этом куске проволоки? Возможно ли сделать то же с меньшим количеством изгибов? Ответьте на эти же вопросы для куба.
17. Попробуйте изобразить: а) замкнутую ломаную из пяти звеньев, пересекающую каждое свое звено два раза; б) замкнутую ломаную из шести звеньев, пересекающую каждое свое звено два раза; в) замкнутую шестизвенную ломаную, пересекающую каждое свое звено один раз.
18. На плоскости дан угол. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей, касающихся обеих сторон данного угла.
19. Изобразите следующие треугольники:
- а) у которого есть ось симметрии;
  - б) у которого отсутствует ось симметрии, но который можно разделить на два других треугольника, имеющих ось симметрии;
  - в) не имеющий ось симметрии, делящийся на три треугольника, имеющих ось симметрии.
20. Постройте треугольник, если известны его элементы:
- а) две стороны и высота, проведенная к одной из них;
  - б) две стороны и угол напротив одной из них;
  - в) две стороны и медиана, проведенная к одной из них;
  - г) сторона, прилежащий угол и биссектриса этого угла;
  - д) вершина и середины двух сторон, выходящих из этой вершины;
  - е)\* две вершины и прямая, на которой лежит биссектриса, выходящая из третьей вершины;
  - ж) две вершины и середина высоты, опущенной из третьей вершины.

21. Следующие фигуры выложены из спичек (рис. 9). Дополните каждую из них одной спичкой таким образом, чтобы у каждой фигуры появился центр симметрии.

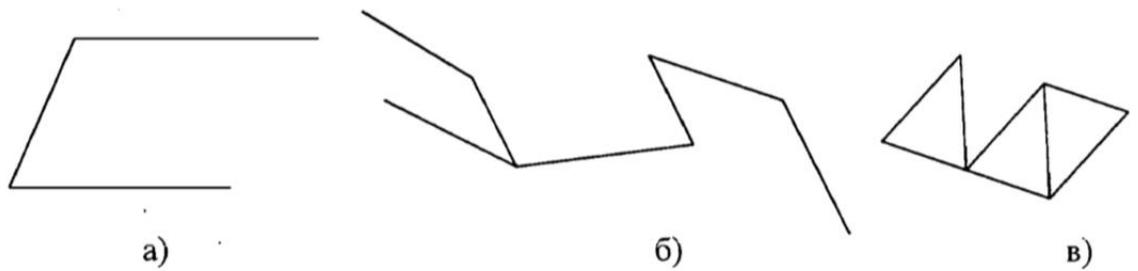


Рис. 9

22. Дополните каждое изображение одним отрезком таким образом, чтобы у картинок появилась ось симметрии (рис. 10). Изобразите ваше решение.

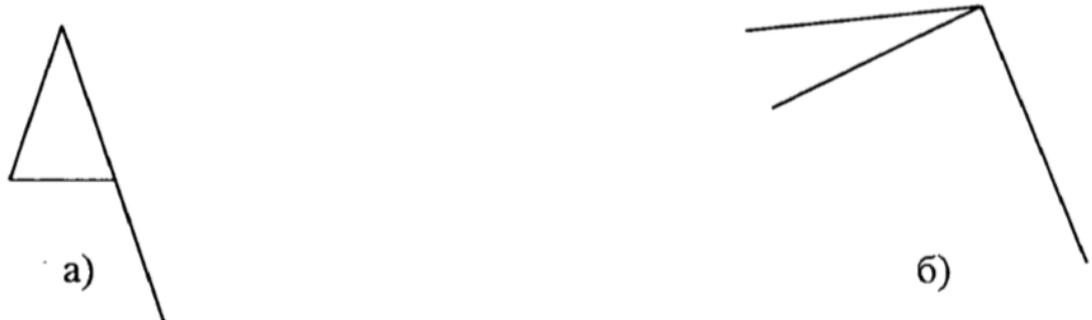


Рис. 10

23. Каким образом расположить три отрезка на плоскости, чтобы образовавшаяся картинка имела центр симметрии?

24. Сколько существует способов дополнить изображение одним отрезком (рис. 11), чтобы у фигуры появились: а) центр симметрии; б) ось симметрии?

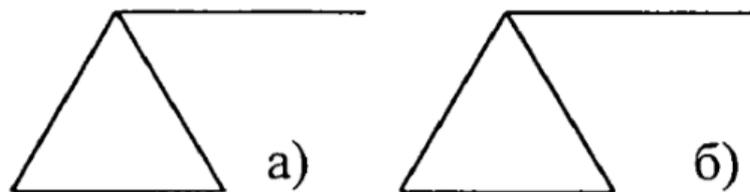


Рис. 11

25. Получится ли составить паркет из копий произвольного треугольника?

26. Данный угол равен  $25^\circ$ . Постройте с помощью циркуля и линейки угол, равный  $65^\circ$ .
27. Данный угол равен  $19^\circ$ . Постройте угол величиной в  $1^\circ$ .
28. Постройте середину данной дуги окружности.
29. Изображены кривая, прямая и ломаная. Часть чертежа на доске стёрли. Нужно восстановить потерянную навеки часть изображения. Для какой из данных линий это возможно? Почему?
30. Сколько прямоугольников изображено на рисунке 12?

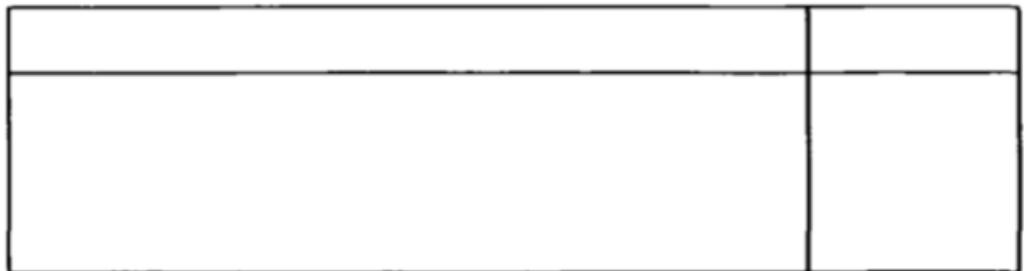


Рис. 12

31. Сколько треугольников изображено на рисунке 13?

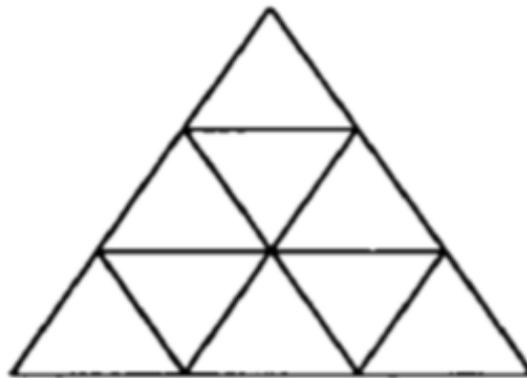


Рис. 13

32. Сколько четырехугольников изображено на рисунке 14?

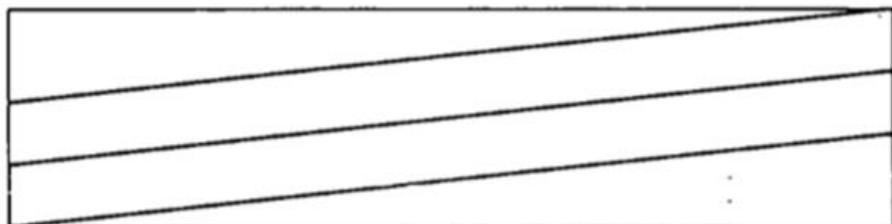


Рис. 14

33. Найдите 27 треугольников на рисунке 15.

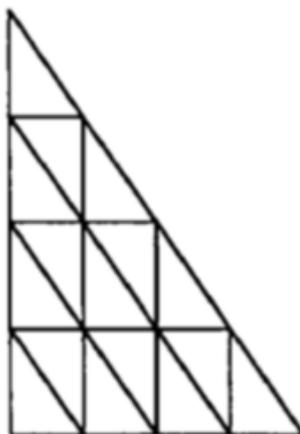


Рис. 15

34. В тетради в клетку изобразите несколько замкнутых ломаных, все звенья которых проходят по линиям сетки. Определите и объясните, почему каждая такая ломаная имеет четное число звеньев.

Для блока Б характерны задачи, направленные на формирование умений осуществлять перенос полученных знаний и приемов построений в новые условия, изменение строения имеющихся способов действий или создание новых, выбор рациональных приемов конструктивных действий.

35. На плоскости дан отрезок. Найдите геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей, для которых данный отрезок является хордой.

36. а) Возможно ли построить пятиугольник, у которого все диагонали попарно не пересекаются. Если этого возможно, постройте такой пятиугольник.

б) Определите, существует ли шестиугольник с таким же свойством?

37. а) Постройте ломаную, которая пересекает каждое свое звено. Может ли такая ломаная иметь только три звена? А четыре?

б) Изобразите ломаную, каждое звено которой пересекается с другими звеньями ровно два раза. Какое количество звеньев и сколько вершин содержит построенная вами ломаная?

в) На сколько составляющих можно разделить плоскость замкнутой ломаной, содержащей шесть звеньев?

38. Какое максимальное количество точек самопересечения может быть у замкнутой ломаной, состоящей из пяти звеньев? А из семи? Попробуйте ответить на этот вопрос для ломаной, имеющей любое нечетное число звеньев. Для чего в условии задачи указана именно замкнутая ломанная? Как повлияет отказ от этого условия? Затем решите данную задачу для ломаной, содержащей четное количество звеньев?
39. Изобразите отрезок АВ. Продлите его за точку В. Точку, где заканчивается новый отрезок, назовите С. Какое количество отрезков теперь изображено на чертеже? Потом продолжите отрезок АВ за точку А. Точку, заканчивается продолжение, назовите D. А какое количество отрезков теперь на изображении? Определите, на сколько отрезков увеличивается количество отрезков на чертеже, когда вы продлеваете отрезок за его конец?
40. Нарисуйте отрезок, укажите внутри него две точки точку и посчитайте, сколько отрезков теперь изображено. Потом добавьте на отрезок ещё одну точку и снова вычислите количество отрезков. Продолжайте повторять эти действия, каждый раз добавляя одну точку. Возможно, вы обнаружите определенную закономерность в получаемом числе отрезков? Попробуйте доказать эту закономерность. И в качестве итога, попробуйте вывести формулу для числа получаемых отрезков, если в отрезке поставлено  $n$  отличных друг от друга точек.
41. Попробуйте изобразить два отрезка таким образом, чтобы:
- а) их пересечение и объединение также были отрезками;
  - б) их пересечение являлось отрезком, а объединение не являлось отрезком;
  - в) их пересечение не являлось отрезком, а объединение отрезком являлось;
  - г) ни пересечение, ни объединение не были отрезками?

42. На плоскости даны окружность и точка  $A$ , не лежащая на ней. Найдите на окружности точку  $M$ , такую, чтобы длина отрезка  $AM$  была бы:  
а) наименьшей; б) наибольшей.
43. На плоскости расположены две окружности с общим центром. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся обеих данных окружностей.
44. На плоскости даны прямая и окружность. Найдите точку на окружности и точку на прямой, такие, чтобы отрезок, соединяющий их, был наименьшим.
45. Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник, четыре угла которого больше развернутого?
46. Хозяйка, приведя козу на пастбище, вбила два колышка на расстоянии 10 м один от другого, натянула между колышками веревку с кольцом так, что кольцо может скользить от колышка к колышку, а к кольцу веревкой длиной 5 м привязала козу. Нарисуйте фигуру, состоящую из точек, до которых может добраться коза.
47. На плоскости проведены две пересекающиеся прямые  $m$  и  $n$ . Найдите геометрическое место точек  $M$  плоскости, которые ближе к  $m$ , чем к  $n$ .
48. Возможно ли покрыть плоскость копиями четырехугольника с произвольными сторонами?
49. Начертите пятиугольный элемент, из которого можно сформировать паркет.
50. Возможно ли замостить плоскость шестиугольниками, которые равны между собой?
- К блоку В следует отнести задачи, использующие умение переносить и переконструировать умения в измененных условиях, творческого подхода, догадки. (Можно использовать задачи с повышенным уровнем сложности).
51. Постройте свой паркетный рисунок.

52. Постройте квадрат. Отметьте следующие точки: вершины, середины сторон и точку пересечения диагоналей. Из всех возможных ломанных, соединяющих две противоположные вершины квадрата, выберите те, звенья которых идут параллельно сторонам квадрата или по ним. Какое количество таких ломанных возможно построить? Существует ли такая ломаная, проходящая через все девять точек? Какое в ней количество звеньев? Попробуйте провести такую ломаную, которая проходит через все девять точек и содержит только четыре звена?
53. Придумайте и изобразите многогранник, тень которого может быть треугольником, четырехугольником, пятиугольником и шестиугольником (в зависимости от положения источника света).
- 54.а) Соедините точки ломаной линией таким образом, чтобы каждая точка являлась вершиной ломаной и никакие два соседних звена не лежали бы на одной прямой (рис. 16).

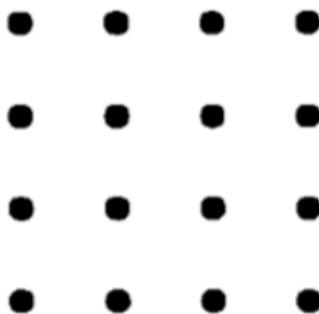


Рис. 16

- б) Попробуйте построить такую же ломаную, но так, чтобы ломаная являлась многоугольником.
55. Можно ли нарисовать открытый конверт, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя более одного раза никакой линии? А закрытый?
56. На берегу глубокого озера круглой формы диаметром 100 м вбит колышек А, а в середине озера расположен остров, а в его центре вбит колышек В (рис.17). У человека, который не умеет плавать, есть ве-

ревка. Ее длина немного больше 100 м. Каким образом, используя веревку и колышки, он может перебраться на остров?

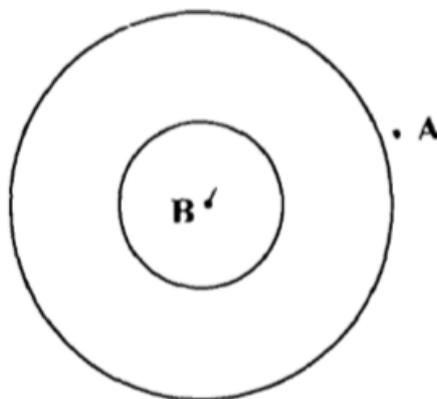


Рис. 17

57. Фигура, изображенная на рисунке 18, есть «инь и янь» – знаменитый китайский символ равновесия темных и светлых сил в природе. Оказывается, проведя лишь одну линию, фигуру можно разделить на две равные части, причем на равные части будет разделена каждая из частей – черная и белая. Найдите эту линию. (Указание. Нужная линия имеет ту же форму, что и граница, разделяющая черную и белую части).

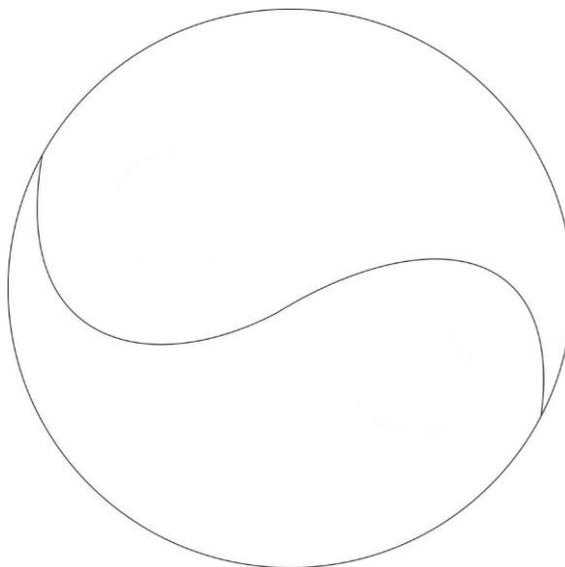


Рис. 18

58. В плоскости расположены 17 шестеренок: первая зацеплена со второй, вторая - с третьей, ..., последняя - с первой. Может ли эта система вращаться?

59. Дан угол и внутри него точка  $A$ . Найдите на одной стороне угла точку  $M$ , а на другой - точку  $N$ , чтобы длина ломаной  $AMN$  была наименьшей.
60. Нарисуйте некоторое число прямых так, чтобы они разбили плоскость на 20 частей. А теперь - на 21 часть. Придумайте способ разбиения плоскости прямыми на любое число частей, при этом желательно, чтобы число прямых было как можно меньше.
61. Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны относительно данной прямой. Найдите на прямой такую точку  $M$ , чтобы разность  $AM - BM$  была наименьшей. Всегда ли такая точка  $M$  на прямой существует?
62. а) На плоскости изображена окружность радиуса 2. Найдите геометрическое место центров окружностей радиуса 1, касающихся данной окружности.
- б) На плоскости расположена окружность с центром  $O$ . Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через точку  $O$  и касающихся данной окружности.
63. Можно ли внутри равнобедренного треугольника поместить другой равнобедренный треугольник с такими же боковыми сторонами? А с большими?

### *Выводы по материалам главы 2:*

Одним из составляющих умственной деятельности в планиметрии, кроме интуитивного, пространственного, логического, метрического и символического, является конструктивный компонент. Его совершенствование происходит в процессе решения задач, встречающихся в курсе планиметрии, которые условно разделяют на перечисленные категории:

1. Задачи, целью выполнения которых является изображение соответствующего геометрического образа.
2. Классические задачи на построение при помощи линейки и циркуля.
3. Задачи, для решения которых требуются дополнительные построения, направленные на получение вспомогательной геометрической фигуры, свойства которой облегчат решение поставленной задачи. Или коротко, задачи на доконструирование.
4. Задачи на замену искомой геометрической фигуры более простой, содержащей ту же искомую величину, что и искомая фигура, а также задачи на деление и перекраивание фигур, или на переконструирование.
5. Задачи, для решения которых на сложном чертеже отделяется простая геометрическая фигура, при этом остальные объекты на чертеже не принимаются во внимание. Такие задачи называют задачами на деконструирование.
6. Задачи на воспроизведение геометрической фигуры, по данным ее элементам, или на реконструирование.

## Заключение

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования выпускник средней школы должен владеть метапредметными навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; быть способным и готовым к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания. Также он должен уметь критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников [40].

Конкретно в процессе обучения в предметной области «Математика» у обучающихся, должны быть сформированы: основы логического, алгоритмического и математического мышления; умения применять полученные знания при решении различных задач; представления о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В данной выпускной квалификационной работе рассматривается формирование конструктивных умений у обучающихся в процессе изучения школьного курса планиметрии.

Цель исследования заключалась в разработке комплекта заданий, направленных на формирование конструктивных умений различных уровней у обучающихся в курсе планиметрии.

Для достижения этой цели был проведён анализ психолого-педагогической литературы по данной теме. Сформулировано понятие конструктивных умений и выделены уровни их развития. Также были приведены в соответствие уровни развития различных видов конструктивных умений и типы заданий, направленные на их формирование.

Определены этапы формирования конструктивных умений у обучающихся и требования к задачам из курса планиметрии, направленным на формирование данных умений.

Разработан комплект заданий, направленных на формирование различных видов конструктивных умений для каждого уровня.

В результате исследования можно утверждать, что целесообразно формировать конструктивные умения в процессе изучения школьного курса планиметрии у обучающихся средней школы.

На основании вышеуказанных результатов можно прийти к выводу, что в ходе исследования были решены все поставленные задачи, и цель данной работы была достигнута.

## Литература

1. Александров А.Д. и др. Геометрия для 8-9 классов: Учебное пособие для учащихся шк. и классов с углуб. изуч. математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. - 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 1995. 415 с.
2. Александров А.Д.. Что такое многогранник? // Математика в школе. 1981.- №2.-С.19-26.
3. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение с решениями. -М.: Учпедгиз, 1950. - 190 с.
4. Арсеньев А.С, Библер ВС, Кедров В.М. Анализ развивающегося понятия. - М.: Наука, 1967. - 439 с.
5. Артемов А.К. Состав и методика формирования геометрических умений школьников. - Пенза: Приволжское книжное изд-во, 1969- 366 с.
6. Баранова Л.Н. Геометрические задачи на построение в основной школе: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. - Орел, 2000. - 18 с.
7. Ботвинников А.Д., Ломов В.Ф. Научные основы формирования графических знаний, умений и навыков школьников. - М.: Педагогика, 1979. - 255 с.
8. Воистинова Г.Х. Задачи на построение как средство формирования приемов мыслительной деятельности учащихся основной школы: Автореф. дис. ... канд. пед. наук.- М., 2000, -17 с.
9. Глейзер Г.Д. Психолого-математические основы развития пространственных представлений при обучении геометрии // Преподавание геометрии в 9 - 10 классах/ Сост. З.А. Скопец, РЛ. Хабиб. - М.: Просвещение, 1980. - С. 253-269.
10. Горбатов Д.С. Умения и навыки: о соотношении содержания этих понятий // Педагогика. - 1994. - №2. - С.15-19.
11. Гуткин Л.И. Сборник задач по математике с практическим содержанием. М., «Высшая школа», 1968
12. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. - М.: ИНТОР, 1996. 544 с.

13. Далингер В.А. Методика формирования пространственных представлений у учащихся при обучении геометрии: Учебное пособие. - Омск: Изд-во Омского пединститута, 1992. - 96 с.
14. Далингер В.А. Чертеж учит думать// Математика в школе. - 1990. №4.- С.32-36.
15. Делоне Б., Житомирский О. Задачи по геометрии. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.- 294 с.
16. Епишева О. Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике. Формирование приемов учебной деятельности: Книга для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 128 с.
17. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода. М.: Просвещение, 2003. 223 с.
18. Зыкова В.И. Формирование практических умений на уроках геометрии. - М.: АПН РСФСР, 1963. - 200 с
19. Ишмакова М. С. Конструирование в дошкольном образовании в условиях введения ФГОС: пособие для педагогов. – М.: Изд-во Полиграф. Центр «Маска», 2013. – 100 с.
20. Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственных действий и умственного развития учащихся. - М.: Просвещение, 1968. - 288 с.
21. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия: учебное пособие для 6-8 классов средней школы. - М: Просвещение, 1876. - 384 с.
22. Кононенко Н.В. Формирование конструктивных умений при изучении школьного курса геометрии // Современные проблемы методики преподавания математики и информатики: Материалы II Сибирских методических Чтений (15-20 декабря 1997) / Под общ. ред. И.К. Жинеренко и З.В. Семеновой. Омск: ОмГУ, 1997. -С.101.
23. Коровина В.Г. Развитие конструктивных умений и навыков учащихся IX - X классов средней школы в процессе решения геометрических задач; Автореф. дис. ... канд. пед. наук. -М., 1988. - 15 с.

24. Коровина, В.Г. Развитие конструктивных умений и навыков учащихся IX–X классов средней школы в процессе решения геометрических задач: автореф. дис. ... канд. пед. наук:13.00.02 / В.Г. Коровина. – М., 1988. – 15 с.
25. Лиштван З. В. Конструирование: Пособие для воспитателей и педагогов. М.: Просвещение, 2011. С. 175.
26. Математика в школе / журнал: № 2,4,5 1994.
27. Никитина Г.И. Задачи на построение в курсе геометрии как средство развития пространственного мышления и конструктивных умений школьников: Автореф. дис. ... канд. пед. наук. - М., 1990. - 16 с.
28. Орлов В.В. Построение основного курса геометрии общеобразовательной школы в концепции личностно ориентированного обучения: Автореф. дис. ... доктора пед. наук. -С. -Петербург, 2000. -44 с.
29. Педагогическая энциклопедия: ТТ.3,4. - М.: Сов. энциклопедия, 1966, 1968.
30. Платонов К.К. О знаниях, умениях и навыках // Советская педагогика. - 1963. - №11. - С.98 - 103.
31. Плотникова Е.Г. и др. Прикладные задачи как средство развивающего обучения // Математика в вузе и школе: обучение и развитие. - Новгород, 1997.-С. 36.
32. Покровский В.С. Как составить геометрическую задачу / В мире математики. Сб. науч.-поп. статей / Под ред. М.И. Ядренко. Вып. 16.- Киев, 1985. -С. 155-177.
33. Рыжик В.И. Как сделать задачник. - С. - Петербург, 1995. - 55 с.
34. Сатьянов П.Г. Задачи графического содержания при обучении алгебры и началам анализа // Математика в школе. - 1987- №1 - С 55 - 60.
35. Симонов А.Я. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. - М.: Просвещение, 1991. - 208 с.
36. Субботина Л.Ю. Развитие воображения у детей: Популярное пособие для родителей и педагогов. - Ярославль: Академия развития, 1996. - 240 с.

37. Тухолко, Л.Л. Методика построения системы задач для развития конструктивной деятельности учащихся X–XI классов при обучении геометрии / Л.Л. Тухолко, В.В. Шлыков // Матэматыка: праблемы выкладання. – 2013. –№ 1. – С. 14–41.
38. Усова А.В. О критериях и уровнях сформированности умений учащихся // Советская педагогика. - 1980- №12. - С. 45 - 48.
39. Усова А.В. Формирование учебных умений учащихся // Советская педагогика. - 1982. - №1. - С. 45 - 48.
40. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (10-11 кл.) – Министерство образования и науки Российской Федерации // URL: <https://минобрнауки.рф/документы/2365> (дата обращения 10.04.2019).
41. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. психологии. - М.: Просвещение, 1983. - 160 с. - (Псих.-пед. основы обучения в шк.).
42. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия. 5-6 кл.: Пособие для общеобразовательных учебных заведений. - М.: Дрофа, 1998. - 192 с.
43. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. - Научн.-исслед. ин-т общей и пед. психологии АПН СССР. - М.: Педагогика, 1980.-240 с.