ШКОЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 372.851.4
ББК Ч426.221
DOI 10.12345/2079-8717_2021_01_04
ГРНТИ 14.25.09
Код ВАК 13.00.02

Бондарь Александр Александрович,
кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, Специализированный учебно-научный центр Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина; 620137, Россия, г. Екатеринбург, ул. Данилы Зверева, 30; e-mail: a.-bondar@mail.ru

Мамалыга Раиса Федоровна,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры шахматного искусства и компьютерной математики, Уральский государственный экономический университет; 620144, Россия, г. Екатеринбург, ул. 8 Марта, 62; e-mail: gcg45@mail.ru

О РАЗВИТИИ ПОДХОДОВ В ФОРМИРОВАНИИ ПОНЯТИЯ «МНОГОГРАННИК» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многогранники; геометрия; методика преподавания геометрии в школе; геометрические фигуры; школьники; математические понятия; формирование понятий; конструктивные определения.

АННОТАЦИЯ. Одним из ключевых понятий школьного курса геометрии является понятие «многогранник». На протяжении всей истории исследования многогранников ученые выделяли все новые и более сложные их типы. Так, в древних трудах представлены в основном правильные многогранники, в более позднее время акцент был сделан на изучении призм и пирамид, а на современном этапе исследуются не только выпуклые, но и звездчатые, однородные и полуоднороднородные многогранники. В связи с этим научное представление данного понятия, а также его определение в каждом обозримом историческом моменте менялись. Выделение его характеристических свойств и их описание в учебной литературе является методически сложным для авторов учебников.
Большой вклад в представление понятия «многогранник» в отечественных учебниках внес известный математик А. Д. Александров. В 1981 г., в журнале «Математика в школе», он проанализировал существующие на то время определения этого понятия в школьных учебниках по геометрии и предложил свое определение, которое охватывало более широкий класс многогранников.
В данной статье описан анализ того, как изменились определения основных понятий теории многогранников, их объемы и содержание в школьном курсе геометрии с момента публикации А. Д. Александрова по настоящее время. Проанализированы современные школьные учебники, входящие в Федеральный перечень рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования. Приводится описание анализа педагогического эксперимента, целью которого была проверка сформированности понятия многогранника у выпускников школ.
Предлагается осуществлять качественный анализ связей данного понятия с другими понятиями таких теорий, как теория графов, группы, вычислительная геометрия в проектной или кружковой деятельности обучаемых.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Бондарь, А. А. О развитии подходов в формировании понятия «многогранник» в школьном курсе геометрии / А. А. Бондарь, Р. Ф. Мамалыга. – Текст : непосредственный // Педагогическое образование в России. – 2021. – № 1. – С. 33-40. – DOI: 10.12345/2079-8717_2021_01_04.

Bondar Alexander Alexandrovich,
Candidate of Physics and Mathematics, Head of Department of Mathematics, Specialized Educational and Scientific Center of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia

Mamalyga Raisa Fedorovna,
Candidate of Pedagogy, Associate Professor of Department of Chess Art and Computer Mathematics, Ural State University of Economics, Ekaterinburg, Russia

ABOUT THE EXTENSION OF APPROACHES IN THE FORMATION OF THE CONCEPT “POLYHEDRON” IN SCHOOL GEOMETRY COURSE

KEYWORDS: polyhedrons; geometry; methods of teaching geometry at school; geometric figures; students; mathematical concepts; the formation of concepts; constructive definitions.

ABSTRACT. One of the key concepts of the school geometry course is the concept of “polyhedron”. Throughout the history of the study of polyhedra, scientists have identified more and more complex types of them. So, in ancient works, mainly regular polyhedra are presented, in a later time the emphasis was on the study of prisms and pyramids, and at the present stage not only convex, but also stellate, homogeneous and semi-homogeneous polyhedra are studied. In this regard, the scientific presentation of this concept, as well as its definition in every foreseeable historical moment, has changed. The selection of its characteristic properties and their description in the educational literature is methodologically difficult for the authors of textbooks.
Great contribution to the representation of the concept of “polyhedron” in domestic textbooks made famous mathematician A. D. Aleksandrov. In 1981, in the journal “Mathematics in School”, he analyzed the

then existing definitions of this concept in school textbooks on geometry and proposed his own definition, which covered a wider class of polyhedral.
This article describes an analysis of how the definitions of the basic concepts of the theory of polyhedra, their volumes and content in the school geometry course have changed since the publication of A. D. Aleksandrov to the present. Analyzed are modern school textbooks included in the Federal List recommended for use in the implementation of general education programs. The description of the analysis of the pedagogical experiment, the purpose of which was to test the formation of the concept of a polyhedron in school graduates.
It is proposed to carry out a qualitative analysis of the connections of this concept with other concepts of such theories as graph theory, groups, computational geometry in the project or circle activities of students.

FOR CITATION: Bondar, A. A., Mamalyga, R. F. (2021). About the Extension of Approaches in the Formation of the Concept "Polyhedron" in School Geometry Course. In *Pedagogical Education in Russia*. No. 1, pp. 33-40. DOI: 10.12345/2079-8717_2021_01_04.

Актуальность проблемы. Окружающая нас действительность – это всевозможные многогранные формы, и так, кажется, было всегда и везде. Особенно если подкрепить это наблюдение ссылками на «Начала» Евклида (III в. до н.э.). В литературе, связанной с изучением и комментариями к древнему изданию, предполагается, что Евклид создал свой гениальный труд как учебник, подготавливающий к пониманию свойств и особенностей применения многогранников. Он и его предшественники придавали исключительное значение теории правильных многогранников. Интерес ученых к этой теме на протяжении всей последующей истории не угасал. Одно только перечисление некоторых имен, внесших значительный вклад в описание различных видов многогранников, впечатляет и подтверждает значимость этих математических объектов: Платон (V в.), Табит ибн Курра (IX в.), Абу'л Вафа (X в.), Леонардо да Винчи (XV в.), Иоганн Кеплер (XVII в.), Луи Пуансо (XIX в.). В XVIII в. большой вклад в исследование выпуклых многогранников внес Леонард Эйлер, получив свою знаменитую формулу $B + \Gamma - P = 2$. Огюстен Коши (XIX в.) в своей работе [1] установил, что существуют всего 4 правильных звездчатых тела, которые не являются соединениями платоновых и звездчатых тел. Эстафету этих блестящих исследований в XX в. продолжили как ученые, так и популяризаторы науки: А. Д. Александров 1950 г. [3], Г. Кокстер 1966 г. [15], B. Grunbaum 1967 г. [28], М. Веннинджер 1974 г. [6], А. Клауди 2014 г. [18]. В XX и XXI вв. исследуются и описываются многогранники не только в трехмерном, но и в пространствах более высокой размерности.

Пристальное внимание математиков к генезису понятия «многогранник» нашло отражение и в отечественных учебниках. Так, обучаемые в XVIII и XIX вв. знакомятся не только с определением многогранной поверхности, но и обосновывают, почему существует только пять видов правильных многогранников [9; 16; 23].

В учебниках по геометрии конца XX – начала XXI вв. теме «Многогранники» также отводится значительное место: дается определение правильных многогранников; доказывается теорема Эйлера; приводится описание некоторых полуправильных и звездчатых многогранников [24].

В 1981 г. в статьях [1-2] А. Д. Александровым был проведен детальный анализ формирования понятия «многогранник» в действующих на то время пособиях для 9–10 классов, утвержденных Министерством просвещения СССР [13; 14; 25]. Автор обращает внимание на то, что определения этого понятия, представленные в учебниках [13; 14] неэквивалентны. Здесь же отмечается однотипность рисунков многогранников в данных пособиях (рассматриваются модели только выпуклых многогранников). А. Д. Александров считает, что, поскольку данная тема центральная в курсе стереометрии, «необходимо особенно внимательно сочетать наглядные представления, рассмотрение реальных примеров и *логическую точность* формулировок».

В данной статье описан анализ того, как изменились определения основных понятий теории многогранников, их объемы и содержание в школьном курсе геометрии с момента публикации статей [1-2].

Методический анализ. Разнообразие определений многогранников в современных школьных учебниках, входящих в Федеральный перечень, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования [25], показало различные подходы к объему и характеристическим свойствам этого понятия. Можно выделить условно три точки зрения на понимание его содержания.

При первом подходе в содержании понятия выделяются отдельно характеристические свойства геометрического тела:

Геометрическое тело – это связная замкнутая фигура в пространстве, обладающая свойствами:

– у нее есть внутренние точки, и любые две из них можно соединить линией, которая целиком состоит из внутренних точек (связность);

– фигура содержит свою границу, и эта граница совпадает с границей множества всех внутренних точек фигуры.

Многогранник – геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников [4; 11; 17; 22].

При втором подходе авторы используют аналогичное определение многогранника, однако не дают определения геометрического тела, ограничиваясь описанием наглядного представления [8; 21; 24; 26].

При третьем подходе: **многогранник** – совокупность конечного числа плоских многоугольников в трехмерном пространстве, такая, что:

– каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне);

– связность: от любого из многоугольников, составляющих многогранник, можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь, к смежному с ним, и т. д. [7].

Вокруг нас так много предметов, представляющих по форме многогранники, что учителю не составляет большого труда привести разнообразные примеры, подкрепляя теоретический материал учебников по данной теме (рис. 1, 2).

Рис. 1. Национальная библиотека Беларуси

Рис. 2. Кристалл горного хрусталя

С другой стороны, существуют примеры многогранников столь сложной формы, что обосновать свое интуитивное представление об этих конструкциях для обучаемых бывает затруднительно, например, представленные на рис. 3, 4, 5, а также множество точек, заданное как разность множества точек двух кубов (так называемый «закрытый ларец») $\{(x,y,z)\,|\,|x|\le 5,|y|\le 5,|z|\le 5\}\setminus\{(x,y,z)\,|\,|x|<3,|y|<3,|z|<3\}$.

Рис.3. Штаб-квартира Центрального телевидения Китая

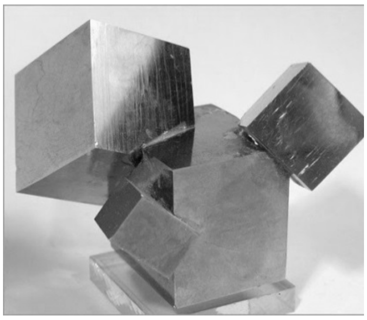

Рис. 4. Минерал пирита

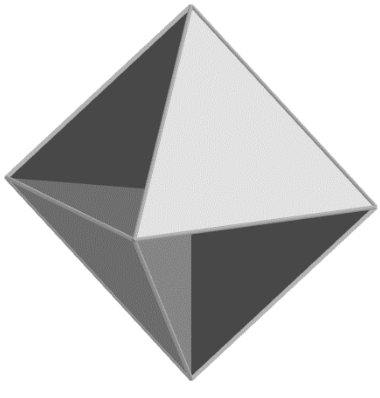

***Рис.5. Тетрагемиогексаэдр** [12]*

С целью проверки сформированности понятия многогранника у выпускников школ, поступивших на первый курс направления подготовки «Педагогическое образование: Математика и информатика», был проведен педагогический эксперимент. В ходе эксперимента студентам был предложен ряд геометрических фигур (тетраэдр, октаэдр, звездчатый октаэдр, «закрытый ларец» и тетрагемиогексаэдр). Все эти фигуры, за исключением двух последних, были определены респондентами как многогранники.

В дальнейшем, при ответах на наводящие вопросы, 80% от опрошенных решили поменять свой выбор – звездчатый октаэдр и тетрагемиогексаэдр были объявлены не многогранниками на основании того, что они не лежат по одну сторону от плоскости любой своей грани (таким образом, понятия многогранника и выпуклого многогранника большинством студентов отождествляются).

Дальнейшее обсуждение свойств звездчатого октаэдра и тетрагемиогексаэдра выявило несформированность у студентов такого важного понятия, как связность, которое является характеристическим свойством многогранника при любом подходе к его определению.

На втором этапе этого эксперимента были предложены два определения многогранников (см. выше), на основании которых нужно было отсортировать предложенные фигуры. В итоге при обсуждении было выяснено, что тетраэдр, октаэдр, звездчатый октаэдр являются многогранниками по обоим определениям; «закрытый ларец» является многогранником согласно первому определению и не является многогранником по второму определению (нарушается свойство 2 определения 2).

Особенно много сомнений возникло относительно однородного многогранника – тетрагемиогексаэдра. При определении его характеристических свойств было установлено, что нарушается связность внутренности, поэтому он не является многогранником по первому определению. Вопрос, является ли многогранником по второму определению, вызвал недоумение. Смириться с тем, что у него грани – 4 треугольника и три квадрата – удалось не всем студентам и не сразу. После освоения понятия самопересечения был получен ответ на поставленный вопрос. Тетрагемиогексаэдр является многогранником по второму определению.

Таким образом, в ходе эксперимента были выяснены причины несформированности понятия многогранника у респондентов:

– непонимание топологических понятий (связность, выпуклость);

– однообразие примеров, иллюстрирующих понятие многогранника;

– отсутствие контрпримеров в школьных учебниках.

В той же статье [2] А. Д. Александровым было рассмотрено еще одно определение многогранника – конструктивное: фигура является многогранником тогда и только тогда, когда ее можно составить из конечного числа тетраэдров так, что:

(1) каждые два тетраэдра либо не имеют общих точек, либо имеют только одну общую вершину, или одно общее ребро, или одну общую грань;

(2) от одного тетраэдра к каждому можно пройти по тетраэдрам, последовательно прилегающим один к другому по целым граням.

В статье [5] приводится ряд соображений в пользу введения понятия многогранника с помощью этого определения при обучении геометрии в техническом колледже. Там же автор предлагает следующее: наряду с дескриптивными определениями многогранника рассматривать и это конструктивное определение. Однако за прошедшие годы не появилось школьного учебника, кроме учебника А. Д. Александрова [4], где бы был реализован этот подход. Сложных конструктивных определений авторы отечественных учебников по геометрии не безосновательно избегают. Педагогами и методистами признается, что формирование понятия в школьном курсе нецелесообразно начинать с определения. Можно отметить, что при поддержке информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) такой подход может дать неплохие результаты, и потому в новых реалиях имеет смысл использовать и его. Так, применяя конструктивное определение, можно убедиться в том, что «Закрытый ларец» является многогранником. На рисунке 6 представлено разбиение[1] на прямоугольные параллелепипеды плоскостями, содержащими его грани, выполненное в программе GeoGebra.

Каждый из полученных прямоугольных параллелепипедов может быть разбит на тетраэдры, например, следующим образом:

1) разбить все грани на треугольники;

2) выбрать произвольную внутреннюю точку параллелепипеда;

3) соединить эту точку с каждой вершиной полученных треугольников (рис. 7).

Данный алгоритм может быть применен для разбиения любого выпуклого многогранника.

[1] Под разбиением многогранника мы будем понимать конечное множество многогранников, которые в объединении дают исходный многогранник, и пересечение любых двух многогранников из разбиения либо пусто, либо является гранью этих многогранников.

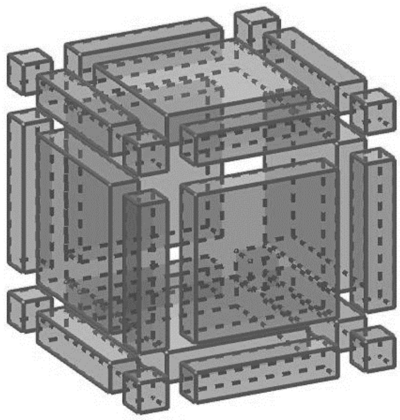

Рис. 6. Разбиение «закрытого ларца»

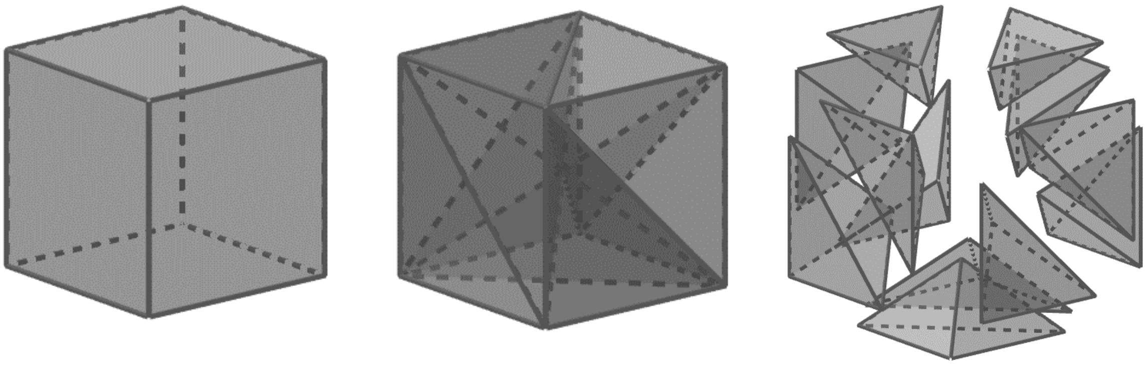

Рис. 7. Разбиение прямоугольного параллелепипеда на тетраэдры

Покажем на конкретных примерах особенности выполнения прямой и обратной задачи по созданию объема понятия «многогранник» с использованием ИКТ при конструктивном определении.

Прямая задача: из предложенных восьми одинаковых тетраэдров (рис. 8) составить фигуру (многогранник).

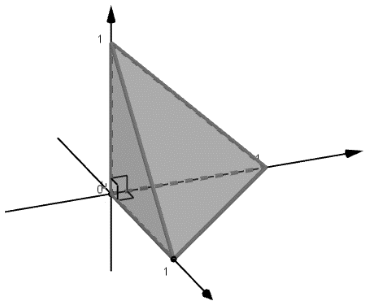

Рис. 8. Тетраэдр

С задачами такого плана дети начинают знакомиться, можно сказать, в детском саду. Конечно, богатство форм многогранников, которые могут здесь возникнуть, поражает (рис. 9).

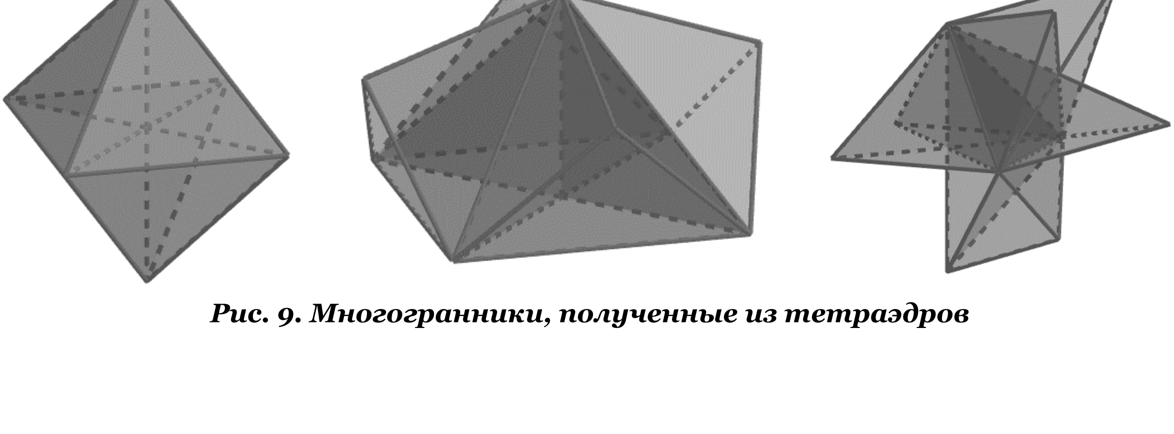

Рис. 9. Многогранники, полученные из тетраэдров

Обратная задача: определить будет ли «минерал пирита» (рис. 4) многогранником? Для обоснования утвердительного ответа была создана компьютерная модель этого минерала (рис. 10) и выполнено разбиение (рис. 11) на выпуклые многогранники, каждый из которых может быть разбит на тетраэдры по вышеизложенному алгоритму (рис. 7).

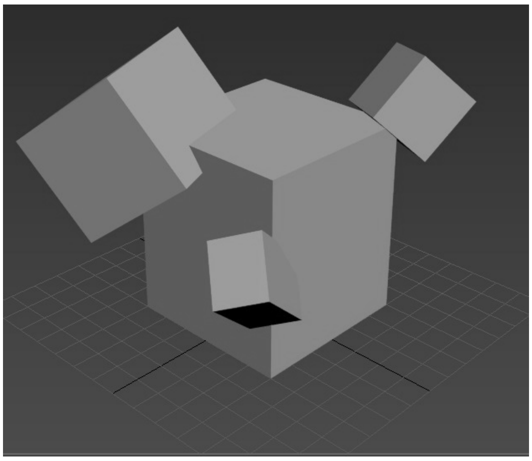

Рис. 10. Компьютерная модель минерала пирит

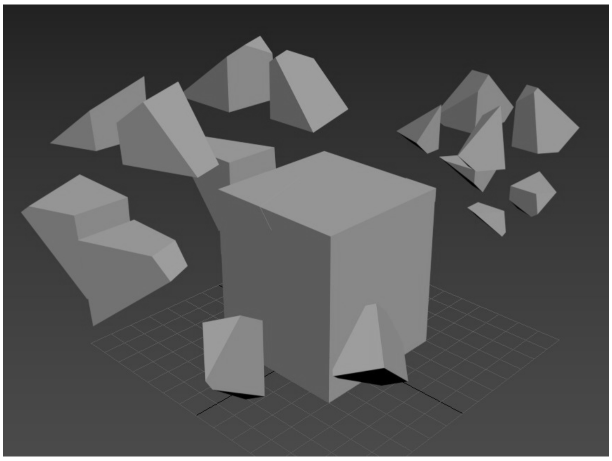

Рис. 11. Разбиение на выпуклые многогранники

Также одним из важных элементов в модели формирования геометрических понятий является определение значения и места данного понятия в изучаемой теории. При конструктивном определении многогранника осуществляется пропедевтика решения целого класса задач ЕГЭ, в которых применяется прием разбиения данного многогранника. Например, задачи на вычисление объемов и вычисление отношений объемов частей многогранника.

Весьма заманчиво было бы считать конструктивное определение наиболее общим. Однако тот же тетрагемиогексаэдр нельзя разбить на тетраэдры, и такие примеры, конечно, появляются среди невыпуклых многогранников. На множестве выпуклых многогранников все эти три определения эквивалентны.

Заключение. Основываясь на анализе генезиса определений многогранника в школьных учебниках за прошедший период, можно ожидать появления в дальнейшем более общих определений данного понятия, которые будут опираться на возможности современных средств наглядности: компьютерные и виртуальные 3D модели, дополненную реальность и т. п. Но при любом подходе к определению многогранника необходимо опираться на понятие связности. Основываясь на результатах проведенного эксперимента, можно сделать вывод о недостаточной сформированности у современных школьников этого понятия. Топологические свойства физического мира, такие как связность, как утверждают психологи, – это те свойства, с которыми человек встречается очень рано [12; 19]. Они приводят в пример такие «трагические» события: чашка остается в руке, а блюдце падает, или разбор любимой машинки на составные части. Поэтому более раннее знакомство с этим понятием возможно уже в детском саду. В младших классах – за счет дополнения примерами не только бытовыми, но и из различных учебных дисциплин, например, написание букв алфавита. В средних классах уже подготовленный объем примеров и их содержание дадут возможность сформулировать определение, которое в старших классах будет встроено в определение многогранника.

Развитие понятия «многогранник» у обучаемых выводит их на современные разделы математики, такие как теория графов, группы, вычислительная геометрия. Поэтому дальнейшим этапом в изучении многогранников в школьном преподавании может стать ряд проектов. Например, если рассматривать ребра правильных многогранников как ребра графов, можно исследовать связь многогранников с планарными графами. Можно установить связь многогранников с теорией групп – строение группы самосовмещений многогранников.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров, А. Д. Выпуклые многогранники / А. Д. Александров. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

2. Александров, А. Д. Геометрия : учеб. для учащихся 11 кл. с углубл. изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Издательство «Просвещение», 2000.

3. Александров, А. Д. Что такое многогранник? / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1981. – № 1. – С. 8-16.
4. Александров, А. Д. Что такое многогранник? / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1981. – № 2. – С. 24-27.
5. Булычева, Ю. В. Формирование понятия многогранника в процессе обучения геометрическому материалу студентов технических колледжей / Ю. В. Булычева // Вестник АГТУ. – 2006. – № 4.
6. Веннинджер, М. Модели многогранников / М. Веннинджер. – М. : Мир, 1974.
7. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013.
8. Геометрия. Профильный уровень : учебник для 10 класса / В. А. Гусев, Е. Д. Куланин, А. Г. Мякишев [и др.]. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
9. Давидов, А. Элементарная геометрия в объеме гимназического курса / А. Давидов. – М., 1878.
10. Звездчатые многогранники. – URL: http://zvzd3d.ru/OM.html#800023 (дата обращения: 22.08.2020). – Текст : электронный.
11. Калинин, А. Ю. Геометрия. 10–11 классы / А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин. – М. : МЦНМО, 2011.
12. Каплунович, И. Я. Формирование структуры пространственного мышления учащихся при решении математических задач : дис. … канд. психол. наук / Каплунович И. Я. – М., 1978.
13. Киселев, А. П. Элементарная геометрия / А. П. Киселев. – М., 1984.
14. Клопский, В. М. Геометрия : учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / В. М. Клопский, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский. – 4-е изд. – М., 1978.
15. Кокстер, Г. С. М. Введение в геометрию / Г. С. М. Кокстер. – М. : Наука, 1966.
16. Курганов, Н. Г. Генеральная геометрия, или Общее измерение протяжения составляющее Теорию и Практику оной науки / Н. Г. Курганов. – СПб., 1765.
17. Мерзляк, А. Г. Математика: Геометрия. Базовый уровень. 10 класс / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков [и др.]. – 2-е изд. – М. : Вентана-Граф ; Росучебник, 2019.
18. Мир математики : в 40 т. Т. 23: Клауди Альсина. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники : пер. с исп. – М. : Де Агостини, 2014.
19. Пиаже, Ж. Как дети образуют математические понятия / Ж. Пиаже // Хрестоматия по психологии. – М. : Просвещение, 1977.
20. Погорелов, А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Просвещение, 1978.
21. Погорелов, А. В. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А. В. Погорелов. – 13-е изд. – М. : Просвещение, 2014.
22. Потоскуев, Е. В. Геометрия 11 / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич ; под ред. А. Р. Рязановского. – 2-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004.
23. Симашко, Ф. Начальная геометрия и конические сечения / Ф. Симашко. – 5-е изд. – СПб., 1876.
24. Смирнова, И. М. Геометрия. 10–11 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2008.
25. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования. – URL: http://fpu.edu.ru/fpu/ (дата обращения: 22.08.2020). – Текст : электронный.
26. Шарыгин, И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10–11 классы : учебник / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2013.
27. Augustin, Louis Cauchy. Recherches sur les polyèdres / Augustin Louis Cauchy // J. de l'École Polytechnique. – 1813. – № 9. – P. 68-86.
28. Grünbaum, B. Convex Polytopes / B. Grünbaum. – Second Edition. – Washington : Interscience Publishers, 1967.

REFERENCES

1. Aleksandrov, A. D. (1950). *Vypuklye mnogogranniki* [Convex polyhedron]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury.
2. Aleksandrov, A. D., Verner, A. L., Ryzhik, V. I. (2000). *Geometriya* [Geometry]. Moscow, Izdatel'stvo «Prosveshchenie».
3. Aleksandrov, A. D. (1981). Chto takoe mnogogrannik? [What is a polyhedron?]. In *Matematika v shkole*. No. 1, pp. 8-16.
4. Aleksandrov, A. D. (1981). Chto takoe mnogogrannik? [What is a polyhedron?]. In *Matematika v shkole*. No. 2, pp. 24-27.
5. Bulycheva, Yu. V. (2006). Formirovanie ponyatiya mnogogrannika v protsesse obucheniya geometricheskomu materialu studentov tekhnicheskikh kolledzhei [Formation of the concept of a polyhedron in the process of teaching geometric material to students of technical colleges]. In *Vestnik AGTU*. No. 4.
6. Vennindzher, M. (1974). *Modeli mnogogrannikov* [Polyhedron models]. Moscow, Mir.
7. Atanasyan, L. S., Butuzov, V. F., Kadomtsev, S. B., et al. (2013). *Geometriya. 10–11 klassy* [Geometry. 10–11 grades]. 22nd edition. Moscow, Prosveshchenie.
8. Gusev, V. A., Kulanin, E. D., Myakishev, A. G., et al. (2010). *Geometriya. Profil'nyi uroven'* [Geometry. Profile level]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znanii.
9. Davidov, A. (1878). *Elementarnaya geometriya v ob"eme gimnazicheskogo kursa* [Elementary geometry in the course of the gymnasium course]. Moscow.
10. *Zvezdchatye mnogogranniki* [Star polyhedron]. URL: http://zvzd3d.ru/OM.html#800023 (mode of access: 22.08.2020).
11. Kalinin, A. Yu., Tereshin, D. A. (2011). *Geometriya. 10–11 klassy* [Geometry. 10-11 grades]. Moscow, MTsNMO.

12. Kaplunovich, I. Ya. (1978). *Formirovanie struktury prostranstvennogo myshleniya uchashchikhsya pri reshenii matematicheskikh zadach* [Formation of the structure of spatial thinking of students when solving mathematical problems]. Dis. ... kand. psikhol. nauk. Moscow.
13. Kiselev, A. P. (1984). *Elementarnaya geometriya* [Elementary geometry]. Moscow.
14. Klopsky, V. M., Skopets, Z. A., Yagodovsky, M. I. (1978). *Geometriya* [Geometry]. 4 edition. Moscow.
15. Kokster, G. S. M. (1966). *Vvedenie v geometriyu* [Introduction to geometry]. Moscow, Nauka.
16. Kurganov, N. G. (1765). *General'naya geometriya, ili Obshchee izmerenie protyazheniya sostavlyayushchee Teoriyu i Praktiku onoi nauki* [General geometry, or the General dimension of extension, which constitutes the Theory and Practice of this science]. Saint Petersburg.
17. Merzlyak, A. G., Nomirovsky, D. A., Polyakov, V. M., et al. (2019). *Matematika: Geometriya. Bazovyi uroven'. 10 klass* [Mathematics: Geometry. A basic level. Grade 10]. 2nd edition. Moscow, Ventana-Graf, Rosuchebnik.
18. *Mir matematiki : v 40 t. T. 23: Klaudi Al'sina. Tysyacha granei geometricheskoi krasoty. Mnogogranniki* [The world of mathematics, in 40 vols. Vol. 23: Claudi Alsina. A thousand facets of geometric beauty. Polyhedron]. (2014). Moscow, De Agostini.
19. Piaget, J. (1977). Kak deti obrazuyut matematicheskie ponyatiya [How children form math concepts]. In *Khrestomatiya po psikhologii*. Moscow, Prosveshchenie.
20. Pogorelov, A. V. (1978). *Geometriya* [Geometry]. Moscow, Prosveshchenie.
21. Pogorelov, A. V. (2014). *Geometriya. 10–11 klassy* [Geometry. 10-11 grades]. 13 edition. Moscow, Prosveshchenie.
22. Potoskuev, E. V., Zvavich, L. I. (2004). *Geometriya 11* [Geometry 11] / ed. by A. R. Ryazanovsky. 2nd edition. – Moscow, Drofa.
23. Simashko, F. (1876). *Nachal'naya geometriya i konicheskie secheniya* [Initial geometry and tapered sections]. 5th edition. Saint Petersburg.
24. Smirnova, I. M., Smirnov, V. A. (2008). *Geometriya. 10–11 klass* [Geometry. 10-11 grade]. 5th edition. Moscow, Mnemozina.
25. *Federal'nyi perechen' uchebnikov, rekomendovannykh k ispol'zovaniyu pri realizatsii programm obshchego obrazovaniya* [Federal list of textbooks recommended for use in the implementation of general education programs]. URL: http://fpu.edu.ru/fpu/ (mode of access: 22.08.2020).
26. Sharygin, I. F. (2013). *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. Bazovyi uroven'. 10–11 klassy* [Mathematics: algebra and the beginnings of mathematical analysis, geometry. Geometry. A basic level. 10–11 grades]. Moscow, Drofa.
27. Augustin, Louis Cauchy. (1813). Recherches sur les polyèdres. In *J. de l'École Polytechnique*. No. 9, pp. 68-86.
28. Grünbaum, B. (1967). *Convex Polytopes*. Second Edition. Washington, Interscience Publishers.