

Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ В КУРСЕ СТЕРЕОМЕТРИИ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки). Математика и информатика»

Работа допущена к защите:

дата

подпись

оценка

Исполнитель:

Зарывных Наталья Федоровна
студент группы МиИ-1802

Научный руководитель:

Дударева Н.В.,
к.п.н., доцент кафедры ВМиМОМ

Екатеринбург 2023

Введение

Развитие и воспитание математической культуры школьников - не просто передача определенного объема математических знаний и формирование умений и навыков обучающихся, но и развитие мышления, обучение их методам и приемам математической деятельности, воспитание устойчивого интереса к изучению математики. Одной из задач школьного математического образования является формирование у учащихся умений и навыков, которые позволят им адаптироваться к деятельности в обществе с использованием математических знаний. Поэтому при обучении геометрии важно обеспечить учащимся овладение обобщенными методами деятельности и приемами действий, в том числе методом конструирования.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту основного и среднего общего образования предметные результаты освоения курса геометрии на базовом и углубленном уровнях должны включать в себя не только владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах, но и «... умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники;...; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств;...; умение ... выполнять необходимые дополнительные построения; ... ;строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи». Все это невозможно без сформированности конструктивных умений обучающихся.

Большое количество работ психолого-педагогической литературы посвящено вопросу формирования конструктивных умений у дошкольников и младших школьников, это работы таких авторов как: Венгер Л.А.,

Давидчук А.Н., Кузин В.С., Куцакова Л.В., Лебедко В.К., Парамонова Л.А. и другие.

В настоящее время у школьников существуют трудности с изображением геометрических фигур на плоскости, в пространстве, и с видением пространственных фигур. Одной из возможных причин возникновения этой проблемы, может быть отсутствие предмета «Черчение» в учебных заведениях. Данный предмет направлен на формирование пространственного мышления и развитие образного мышления путем анализа формы предметов и их конструктивных особенностей, а также мысленного воссоздания пространственных образов предметов по проекционным изображениям.

Обращаясь к результатам ЕГЭ 2022 по математике профильного уровня, можно увидеть, что задание 13 по стереометрии выполнили на ненулевой балл 20%, на полный балл 5% участников экзамена. В основном это учащиеся, претендующие на первичный балл выше 20, среди них 3 балла получают 13,2%, 2 балла – 4,8%, 1 балл – 28,8%, 0 баллов – 53,2%. Достаточно низкий уровень решения стереометрической задачи во многом связан с трудностями, возникающими при построении геометрических фигур, их элементов и сечений, так как неверно или неинформативно построенный чертеж к задаче влечет за собой невозможность провести требуемое доказательство или найти необходимый элемент фигуры. Справиться с данными трудностями можно, формируя конструктивные умения.

Проблемой формирования конструктивных умений учащихся средней и старшей школы занимались Далингер В.А., Кононенко Н.В., Коровина В.Г., Лисимова О.А., Тухолко Л.Л., Шлыков В.В.

Опираясь на требования современных образовательных стандартов к результатам обучения, можно сказать, что проблема формирования

конструктивных умений остается актуальной, особенно в курсе стереометрии.

Объект исследования: процесс обучения стереометрии старших школьников.

Предмет исследования: комплект заданий как средство формирования конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии.

Цель исследования: разработать комплекты заданий, способствующих формированию конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии.

На основании цели исследования были сформулированы следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать методическую и психолого-педагогической литературы с целью определения понятия конструктивные умения.
2. Выделить конструктивные умения, формируемых в курсе стереометрии.
3. Рассмотреть средства и методы формирования конструктивных умений учащихся.
4. Проанализировать виды задач, которые предполагается применять при формировании конструктивных умений.
5. Сформулировать требования, предъявляемые к комплекту заданий для формирования конструктивных умений.
6. Разработать комплекты заданий, способствующих формированию конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав с несколькими параграфами, заключения и списка литературы.

Глава 1. Теоретические основы формирования конструкторных умений учащихся в курсе стереометрии

1.1. Подходы к определению понятия конструктивные умения

В процессе обучения математике формирование умений у учащихся выступает как нечто целостное, самостоятельное, состоящее из взаимосвязанных между собой компонентов. Действительно, в обучении ставится специальная цель – формирование умения. Обучение умениям предполагает взаимосвязанную деятельность обучающего и обучаемого. Первый располагает определенными средствами достижения конкретных целей, второй под влиянием этих средств осуществляет различные виды математической деятельности на разных уровнях. Успех достижения поставленных целей зависит от применяемых методических средств, выбор которых в свою очередь зависит от целей обучения, содержания учебного материала, особенностей усвоения. Процесс формирования математических умений образует методическую систему, в состав которой входят следующие компоненты:

- 1) цели формирования конкретных умений;
- 2) содержание умений (математический материал, на котором они формируются);
- 3) методические средства обучения;
- 4) математическая деятельность учащихся, направленная на усвоение ими умений.

Любые изменения одного или нескольких компонентов оказывают влияние и на другие компоненты этой системы.

Рассмотрим подходы разных авторов к понятиям: умения, деятельность, конструирование, конструктивная деятельность, конструктивные способности, конструктивные умения. Анализ методико-

педагогической и психологической литературы показал, что данные понятия каждый автор определяет по-своему.

Психологи утверждают, что *умение* – это основанная на знаниях и навыках готовность человека успешно выполнять определенную деятельность. Епишева О.Б. под *умениями* понимает возможность производить какое-либо действие, операцию. Платонов К.К. считает, что способность человека продуктивно, качественно и в соответствующее время выполнять работу в новых условиях и есть *умение*. По Петровскому А.В. *умение* заключается во «владении сложной системой психических и практических действий, необходимых для целесообразной регуляции деятельности имеющимися у субъекта знаниями и навыками». Другие авторы определяют *умения* как готовность человека к разного рода действиям, выполнение которых происходит быстро, точно и сознательно, на основе сформированных у него жизненного опыта и знаний.

В каждом из приведенных выше определений встречаются слова: «деятельность», «действие», «выполнение действий». Согласно А.Н. Леонтьеву, *деятельность* – процесс активности человека, связанный с его взаимодействием с окружающей действительностью и направленностью на определенный предмет деятельности.

Конкретизируем понятие конструктивной деятельности. Исследователи отмечают, что *конструктивная деятельность* – это процесс конструирования объектов из различных материалов: от специальных конструкторов до подручных средств. Отмечают также, что конструктивная деятельность заключается в получении некоторого реального продукта, отображающего его функции и свойства, посредством практической деятельности. Шаталова Н.П. утверждает, что алгоритмические действия, направленные на достижение цели в рамках заданных условий и времени, и есть *конструктивная деятельность*.

Обращаясь к происхождению слова «конструирование» можно определить его как создание модели, построение, приведение в определенный порядок и взаимоотношение различных отдельных предметов, частей, элементов. *Конструировать*, в толковом словаре Ожегова С.И., означает «создавать конструкцию чего-нибудь, строить, а также создавать что-нибудь».

Чаще термин «конструирование» встречается в педагогической и методической литературе, посвященной деятельности дошкольников и младших школьников. Под *детским конструированием* Парамонова Л.А. понимает создание конструкций и моделей из строительного материала и деталей конструкторов, изготовление поделок из бумаги, различного природного и бросового материала. В педагогической литературе *конструирование* рассматривается как процесс создания образа предмета труда, который сперва возникает в сознании человека, а затем выражается в схемах, чертежах, описаниях, моделях, с целью использования его в производстве. По мнению Коньшевой Н.М. *конструирование* – это деятельность ума, а не рук; это разработка, сотворение; это творческая, а не исполнительская деятельность. В педагогике *конструирование* в процессе обучения понимается как «средство углубления и расширения полученных теоретических знаний и развития творческих способностей, изобретательских интересов и склонностей учащихся».

Рассмотрим несколько подходов к определению понятия «конструктивные умения». В учебнике по общей психологии выделяют группы умений, одной из которых является «конструктивные умения, связанные с представлениями о продуктах работы, с конструированием их по рисункам, моделям, описаниям и с проявлением этих представлений в словах, моделях, проектах, рабочих движениях». Белошистая А.В. предлагает следующее определение понятия *конструктивные умения*: умение узнавать и выделять объект, синтезировать, анализировать, видоизменять объект,

трансформировать его в другой, с заданными параметрами. Особенно важным является умение оперировать образами в пространстве как с целью изменения пространственного положения целостного образа, так и с целью преобразования структуры образа. Данная деятельность способствует практическому познанию свойств геометрических тел и развитию пространственного мышления, которое расширяет умственные возможности детей и невозможно без развития конструктивных умений учащихся. В своей статье Аввакумова И.А. и Казакова Е.С. предлагают следующее определение понятия *конструктивные умения* – «умения приводить отдельные части / элементы / предметы в их определенное взаиморасположение».

Анализируя литературу на предмет подходов к определению понятий, можно заметить, что часто понятия «конструирование», «конструктивная деятельность» и «конструктивные умения» воспринимают как равнозначные по смыслу. В своей статье Тухолко Л.Л. доказала, что каждое из этих понятий самостоятельно и имеет свое определение. По мнению автора, «*конструирование* – это процесс выбора, комбинирования и соединения объектов». Предложенное определение *конструктивной деятельности* – деятельности по созданию объектов *методом конструирования*, суть которого заключается в создании объектов путем «выбора, комбинирования и соединения каких-либо объектов» доказывает, что понятия «конструирование» и «конструктивная деятельность» не равнозначны. Под *конструктивными умениями* Тухолко Л.Л. понимает способность целенаправленно выполнять каждое из *конструктивных действий* – выбор объектов, из которых с помощью комбинирования и соединения может быть составлена конструкция.

Проведем контент-анализ рассмотренных определений, с целью уточнения понятия «конструктивные умения», которое будет являться основным в данной работе. (Таблица 1)

Таблица 1

Контент-анализ основных определений понятий

Понятие	Ключевые слова																
	Практическая деятельность	Алгоритм	Создание объектов	Метод конструирования	Создание модели / конструкции / продукта	Построение	Приведение в порядок	Взаимоотношение предметов / комбинирование и	Процесс выбора объектов	Деятельность	Творческая деятельность	Конструирование	Умение узнавать и выделять	Умение анализировать	Умение синтезировать	Умение видоизменять	Способность выполнять конструктивные действия
Конструктивная деятельность (Иванина Т.А.)	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Конструктивная деятельность (Шаталова Н.П.)	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Конструктивная деятельность (Тухолко Л.Л.)	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-
Конструирование (происхождение)	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Конструирование (словарь Ожегова С.И.)	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Детское конструирование (Парамонова Л.А.)	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Конструирование (педагогика)	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Конструирование (Коньшева Н.М.)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-
Конструирование (педагогика)	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-

По итогам проведенного контент-анализа в качестве основных были выделены следующие определения понятий:

- *конструирование* – это процесс создания образа предмета, который сперва возникает в сознании человека, а затем выражается в схемах, чертежах, описаниях, моделях, в процессе выбора, комбинирования и соединения объектов с целью использования его при решении задач.
- *конструктивная деятельность* – это деятельность по созданию объектов методом конструирования, суть которого заключается в создании объектов путем выбора, комбинирования и соединения каких-либо объектов (по Тухолко Л.Л.).

Определение понятия «конструктивные умения» синтезируем из определений, предложенных Белошистой А.В. и Тухолко Л.Л., с учетом требований ФГОС СОО, предъявляемым к предметным результатам освоения программы.

Конструктивные умения – это способность целенаправленно выполнять каждое из конструктивных действий: умение узнавать и выделять объект; умение синтезировать; умение анализировать; умение видоизменять объект, трансформировать его в другой, с заданными параметрами.

Конструктивные умения входят в структуру содержания конструктивного компонента области геометрии. Они развиваются последовательно в ходе:

- овладения геометрическими действиями;
- овладения комбинациями конструктивных действий;
- овладения приемами выбора, комбинирования и установления последовательности действий с геометрическими фигурами;
- обогащения опыта конструктивных действий в ходе решения соответствующих заданий.

Таким образом, проведенный анализ психолого-педагогической литературы позволил выделить основные понятия и их определения, которые

будут являться опорными при дальнейшем написании работы. Было выявлено, что чаще авторы в своих работах выделяют конструктивные умения и рассматривают их формирование у дошкольников, младших школьников и у учащихся средних классов в курсе планиметрии. Работ, посвященных формированию данных умений в курсе стереометрии, мало, а конструктивные умения, относящиеся именно к стереометрии, не выделены. В связи с этим возникает потребность в выделении конструктивных умений, формируемых в курсе стереометрии, что мы сделаем, опираясь на некоторые известные классификации, нормативные документы и примерные рабочие программы по геометрии.

1.2. Конструктивные умения, формируемые в курсе стереометрии

Обеспечение школьникам усвоения основных приемов умственной деятельности, развитие их познавательных умений, которые позволяют применять знания, преобразовывать, расширять и дополнять, обретая новые связи и соотношение, необходимо.

Конструктивные умения важны в подготовке для овладения различными специальностями. Часто недостаточное развитие конструктивных умений, а также пространственного мышления становится помехой успешному овладению материалом учебных дисциплин старшей школы.

Рассмотрим классификации конструктивных умений, предлагаемые различными авторами (таблица 2).

Таблица 2

Классификации конструктивных умений

Авторы	Конструктивные умения
Аввакумова И.А., Казакова Е.С.	Основание классификации – конечный результат: <ul style="list-style-type: none"> • умение осуществлять конструктивную деятельность, результатом которой является конечный объект; • умение осуществлять конструктивную деятельность, результатом которой является какая-либо процедура; • умение осуществлять конструктивную деятельность, результатом которой является система элементов и др.
Сверчевская И.А.	<ul style="list-style-type: none"> • умение выполнять рисунки геометрических фигур; • умение представлять геометрические тела; • умение разлагать их на части; • умение рассматривать геометрическое тело с разных позиций; • умение строить развертки геометрических тел и изготавливать модели; • умение решать конструктивные задачи.
Тухолко Л.Л., Шлыков В.В.	На основе анализа конструктивного компонента умственной деятельности в области геометрии выделили конструктивные умения, формируемые в курсе стереометрии: <ol style="list-style-type: none"> 1. умение конструировать: <ul style="list-style-type: none"> • выбирать геометрические фигуры и составлять из них геометрическую конструкцию; • вычленять элементы конструкции;

Авторы	Конструктивные умения
	<ul style="list-style-type: none"> • перегруппировывать элементы конструкции; <p>2. умение строить геометрические фигуры:</p> <ul style="list-style-type: none"> • находить объединение геометрических фигур; • находить пересечение геометрических фигур; • находить разность геометрических фигур; <p>3. умение моделировать:</p> <ul style="list-style-type: none"> • строить модели геометрических фигур и конструкций; • распознавать модели геометрических фигур в объектах действительности и моделях геометрических фигур.
Кононенко Н.В.	<p>Конструктивный компонент, описывающий соответствующие умения, включает в себя умение:</p> <ul style="list-style-type: none"> • распознавать геометрические фигуры на моделях и чертежах; • изображать геометрические фигуры; • анализировать геометрические образы; • синтезировать геометрические образы; • находить множества точек, обладающих определенными свойствами; • представлять фигуры как множество точек, обладающих определенными свойствами; • осуществлять геометрические построения; • осуществлять моделирование; • владение конструктивным методом определения геометрических понятий; • владение конструктивным методом доказательства.
Коровина В.Г.	<ul style="list-style-type: none"> • умение представлять геометрическую фигуру и мысленно ее преобразовывать; • графические умения и навыки; • умение разложить объект на части и собрать из частей; • умение узнавать геометрическую фигуру в новой ситуации; • умение рассматривать фигуру с новых позиций; • вариативные умения; • умение выполнять математические расчеты.
Глейзер Г.Д.	<p>Согласно модели структуры умственной деятельности? конструктивный компонент содержит: «умение осуществлять геометрические построения, умение изображать фигуры, владение конструктивным методом определений, владение конструктивным методом доказательств».</p>

По Глейзеру Г.Д., Пуанкаре А., Якиманской И.С. геометрическая деятельность может осуществляться в различных направлениях и приводить к развитию определенных способностей учащихся в зависимости от преобладания в ее структуре некоторых из компонентов: пространственного, конструктивного, метрического, логического, интуитивного и

символического. При этом под *геометрической деятельностью* понимают целенаправленную систему взаимодействий субъекта с геометрическими фигурами, их идеальными образами, теоретическими понятиями, направленных на формирование пространственных представлений, воображения, адекватных физическому пространству и его математическим моделям.

Рассмотрим виды деятельности, выделенные Тухолко Л.Л., которые способствуют развитию конструктивных умений в курсе стереометрии.

1. *Геометрическое моделирование.*

Для отображения свойств и взаимного расположения пространственных фигур и плоских фигур в пространстве используются следующие модели: физические, компьютерно-графические, образные, словесные, символические и графические.

Физическое и компьютерно-графическое моделирование уместнее всего применять на внеурочных занятиях, посвященных стереометрии, так как они требуют временных затрат. Образное моделирование – формирование образа на графической, символической и других основах. Словесное и символическое моделирование заключается в отображении свойств геометрических фигур и их расположения относительно друг друга в словах и символах.

Целью геометрического моделирования при обучении стереометрии является достижение наглядности, поэтому основным видом моделирования при обучении учащихся стереометрии является графическое моделирование. Суть его заключается в создании графических моделей геометрических фигур и распознавании их в уже созданных моделях.

2. *Геометрическое конструирование.*

Владение конструктивным методом доказательств (метод доказательства истинности (ложности) утверждения на основании создания геометрической конструкции) и конструктивным методом определения

геометрических понятий (метод создания конструкции, которая отражает определяемое понятие) предполагает умение создавать геометрические конструкции с соблюдением связей между фигурами и их элементами.

Целью геометрического конструирования является приобретение знаний о свойствах фигур и определение связей между ними.

3. Построение геометрических фигур.

Умение осуществлять геометрические построения – важный компонент конструктивной деятельности. Действия, выполняемые в процессе моделирования и конструирования, характерны и при построении геометрических фигур, однако, можно выделить некоторые действия, характерные только при построении: объединение, пересечение и нахождение разности геометрических фигур.

Правильно построенная геометрическая фигура – это половина успеха при решении стереометрической задачи. Обращаясь к лекционному материалу по дисциплине «Методы параллельного проектирования», можно выделить требования, предъявляемые к изображениям:

- изображение должно быть *верным* (достаточно строить изображения в строгом соответствии с законами параллельного проектирования);
- изображение должно быть *наглядным* (необходимо из многочисленных параллельных проекций данной фигуры выбрать те, которые наилучшим образом говорят об особенностях формы изображенной фигуры, о взаимном расположении интересующих элементов);
- изображение должно быть *простым* (правила построения должны быть максимально простыми);
- изображение должно быть *информативным* (изображение должно содержать все условия поставленной задачи, для успешного ее решения).

4. Конструктивная геометрическая деятельность.

Конструирование и моделирование в курсе стереометрии – взаимосвязанные виды геометрической деятельности. В процессе моделирования создается замысел конструкции, развивается умение воспринимать одну конструкцию как модели разных фигур. Конструирование – деятельность по созданию моделей с помощью элементарных геометрических объектов и установления связей между ними.

Далингер В.А. предлагает следующие этапы процесса конструирования:

- мысленное представление конструируемого объекта;
- его схематическое изображение;
- выполнение необходимых расчетов;
- материализация конструируемого объекта.

Таким образом, конструктивная геометрическая деятельность включает в себя взаимодополняющие друг друга геометрическое моделирование и геометрическое конструирование.

Предметное содержание конструктивной деятельности определяется типом конструируемых объектов. При обучении геометрии можно выделить следующие компоненты этой деятельности:

- пространственный (конструирование пространственных образов геометрических фигур);
- графический (конструирование графических моделей геометрических фигур);
- абстрактный (конструирование геометрических фигур);
- логический (конструирование предложений, отражающих геометрические суждения);
- символичный (конструирование символических моделей геометрических предложений);
- деятельностный (конструирование способов решения геометрических задач).

Формирование конструктивных геометрических умений и навыков, необходимых для продолжения образования является целью конструктивной геометрической деятельности.

Как было упомянуто ранее, основательное развитие конструктивных умений учащихся начинается при изучении планиметрии. В Федеральном государственном стандарте основного общего образования можно выделить следующие конструктивные умения:

- знакомство с пространственными фигурами; умение решать задачи, в том числе из повседневной жизни, нахождение геометрических величин с применением изученных свойств фигур и фактов;
- умение изображать плоские фигуры и их комбинации, пространственные фигуры от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств по текстовому или символьному описанию;
- умение выполнять необходимые дополнительные построения, исследовать возможность применения теорем и формул для решения задач (углубленный уровень).

Аввакумова И.А. и Коновалова А.С. выделили несколько конструктивных умений, формируемых в курсе планиметрии: умение распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры и их свойства; умение создавать модели и чертежи, соответствующие заданным критериям и стандартам проекционных чертежей; умение интерпретировать графическую информацию; умение решать задачи, требующие графической интерпретации условий.

Все перечисленные выше конструктивные умения продолжают формироваться и в рамках среднего общего образования. Это связано с тем, что учащиеся работают с более сложными планиметрическими задачами, которые способствуют формированию данных умений, а также нередко для

решения стереометрической задачи необходимо выполнить выносной чертеж, и решение стереометрической задачи сводится к планиметрической.

К началу 10 класса основным источником обогащения содержания конструктивной геометрической деятельности учащихся являются пространственные геометрические фигуры и способы действий с ними: построение точек, прямых, плоскостей и т.д.; измерение отрезков и углов; узнавание геометрических фигур, отношений между ними, вычисление геометрических величин; построение моделей геометрических фигур.

В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования на базовом и углубленном уровнях выделяются следующие конструктивные умения, которые должны быть сформированы у учащегося: умение изображать (базовый уровень) и строить (углубленный уровень) многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств.

Обратимся к примерным рабочим программам среднего общего образования по математике на базовом и углубленном уровнях с целью уточнения и расширения перечня конструктивных умений, формируемых в курсе стереометрии.

Приоритетными задачами курса геометрии являются:

- формирование представления о пространственных фигурах как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные явления окружающего мира (базовый и углубленный уровни);
- знание понятийного аппарата по разделу «Стереометрия» школьного курса геометрии (углубленный уровень);
- формирование умения владеть основными понятиями о пространственных фигурах и их основными свойствами (базовый и углубленный уровни);
- формирование умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном

мире многогранники и тела вращения (базовый и углубленный уровни);

- овладение методами решения задач на построения на изображениях пространственных фигур (базовый уровень);
- конструировать геометрические модели (углубленный уровень).

Выберем в качестве основной классификацию конструктивных умений Кононенко Н.В., представленную в начале параграфа. Рассмотрим планируемые предметные результаты освоения курса геометрии 10 и 11 классов на базовом и углубленном уровнях, соотнесем их с умениями, в ходе работы над которыми они достигаются. На основании проделанной работы конкретизируем классификацию конструктивных геометрических умений, формируемых в курсе стереометрии для достижения поставленных задач и предметных результатов (Таблица 3).

Таблица 3

Соотнесение конструктивных умений с планируемыми результатами

Конструктивные умения	Планируемые результаты	
	Базовый уровень	Углубленный уровень
Умение распознавать геометрические фигуры на моделях и чертежах	10 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> распознавать основные виды многогранников (пирамида; призма, прямоугольный параллелепипед, куб); извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках. 	<ul style="list-style-type: none"> свободно распознавать основные виды многогранников (призма, пирамида, прямоугольный параллелепипед, куб); извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках.
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> распознавать тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар); извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках. 	<ul style="list-style-type: none"> распознавать тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар); извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках.
Умение изображать геометрические фигуры	10 класс	
	-	<ul style="list-style-type: none"> выполнять изображения фигур на плоскости.
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> изображать изучаемые фигуры от руки и с применением простых чертёжных инструментов. 	<ul style="list-style-type: none"> изображать изучаемые фигуры; выполнять изображения многогранником и тел вращения при параллельном переносе, центральной симметрии, зеркальной симметрии, при повороте вокруг прямой; преобразования подобия.
Умение анализировать геометрические образы	10 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу; решать задачи на нахождение геометрических величин, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на 	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу.

Конструктивные умения	Планируемые результаты	
	Базовый уровень	Углубленный уровень
	<p>вычисление расстояний между двумя точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми;</p> <ul style="list-style-type: none"> решать задачи на нахождение геометрических величин, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на вычисление углов между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, двугранных углов. 	
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу. 	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу.
Умение синтезировать геометрические образы	10 класс	
	-	-
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> объяснять способы получения многогранников и тел вращения. 	-
Умение осуществлять геометрические построения	10 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> объяснять принципы построения сечений, используя метод следов; строить сечения многогранников методом следов, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу. 	<ul style="list-style-type: none"> строить сечения многогранников различными методами, выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу; выполнять параллельное, центральное и ортогональное проектирование фигур на плоскость; выполнять изображения фигур на плоскости.
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу; строить сечения тел вращения. 	<ul style="list-style-type: none"> выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу; строить сечения тел вращения; строить сечения многогранников и тел вращения:

Конструктивные умения	Планируемые результаты	
	Базовый уровень	Углубленный уровень
		сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара; <ul style="list-style-type: none"> использовать методы построения сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования, метод переноса секущей плоскости.
Умение осуществлять моделирование	10 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры. 	<ul style="list-style-type: none"> моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры.
	11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры. 	<ul style="list-style-type: none"> моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры.
Владение конструктивным методом определения геометрических понятий	10-11 класс	
	<ul style="list-style-type: none"> извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках. 	<ul style="list-style-type: none"> извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках.
Владение конструктивным методом доказательства	10 класс	
		<ul style="list-style-type: none"> решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин, применяя известные методы при решении математических задач повышенного и высокого уровня сложности.
	11 класс	
		<ul style="list-style-type: none"> доказывать геометрические утверждения; решать задачи на доказательство математических

Конструктивные умения	Планируемые результаты	
	Базовый уровень	Углубленный уровень
		отношений и нахождение геометрических величин.

Таким образом, получили перечень конструктивных умений, формируемых в курсе стереометрии:

1. Умение распознавать геометрические фигуры на моделях и чертежах:
 - умение распознавать основные виды многогранников (пирамида; призма, прямоугольный параллелепипед, куб) и тела вращения (цилиндр, конус, сфера и шар);
 - умение извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию о пространственных геометрических фигурах, представленную на чертежах и рисунках.
2. Умение изображать геометрические фигуры:
 - умение изображать изучаемые фигуры от руки и с применением простых чертёжных инструментов;
 - умение выполнять изображения многогранников и тел вращения при параллельном переносе, центральной симметрии, зеркальной симметрии, при повороте вокруг прямой; преобразования подобия.
3. Умение анализировать геометрические образы:
 - умение выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу;
 - умение решать задачи на нахождение геометрических величин, применяя известные аналитические методы при решении стандартных математических задач на вычисление расстояний между двумя точками, от точки до прямой, от точки до плоскости, между скрещивающимися прямыми, углов между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями, двугранных углов.
4. Умение синтезировать геометрические образы:
 - умение объяснять способы получения многогранников и тел вращения.

5. Умение осуществлять геометрические построения:

- умение строить сечения многогранников и тел вращения: сечения цилиндра (параллельно и перпендикулярно оси), сечения конуса (параллельное основанию и проходящее через вершину), сечения шара различными методами.
- умение выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур: вид сверху, сбоку, снизу;
- умение выполнять параллельное, центральное и ортогональное проектирование фигур на плоскость; выполнять изображения фигур на плоскости.

6. Умение осуществлять моделирование:

- умение моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры.

7. Владение конструктивным методом определения геометрических понятий.

8. Владение конструктивным методом доказательства:

- умение решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин, применяя известные методы при решении математических задач повышенного и высокого уровня сложности;
- умение доказывать геометрические утверждения.

Формирование конструктивных умений происходит постепенно: с раннего детства ребенка и до получения им высшего образования. Для их формирования необходимы методы и средства. Проанализируем учебно-методическую литературу, которая посвящена данным теоретическим аспектам.

1.3. Методы и средства формирования конструктивных умений учащихся

Ребенок начинает свою конструктивную деятельность с раннего детства, это проявляется в его желании строить какие-либо конструкции из песка, небольшого количества кубиков или игрушек.

Конструктивные умения ребенка продолжают развиваться в дошкольном возрасте, где он познает конструирование, создавая некоторый продукт, с помощью конструктора, бумаги, природных материалов и других средств. Данная конструктивная деятельность чаще всего нацелена на развитие творческих умений дошкольника, так как, конструируя, он реализует свою задумку с помощью доступных ему материалов. Дошкольники знакомятся с качественными характеристиками различных предметов, запоминают их особенности, детали, овладевают конструктивными умениями и навыками.

В психолого-педагогической литературе выделяются следующие конструктивные умения, которые должны быть сформированы по окончании дошкольного образовательного процесса:

- умение узнать и выделить объект (видеть существенное, т.е. умение - абстрагироваться);
- умение собрать объект из готовых частей (синтезировать);
- умение расчленить, выделить составные части (анализировать);
- умение видоизменять объект по заданным параметрам, получая при этом - новый объект с заданными свойствами.

Известно, что ведущей деятельностью дошкольников является игра, поэтому у них конструктивные умения формируются в процессе строительно-конструктивной игры, которая развивает ориентирование в пространстве, умение различать и устанавливать величину и пропорции предмета, развивает мышление, формирует точный словарь, выражающий название геометрических тел, пространственных взаимоотношений.

Развитие конструктивных умений у младших школьников продолжается в рамках уроков математики, технологии и внеурочной деятельности.

Одна из главных особенностей математики, как учебного предмета заключается в том, что даже на начальных этапах обучения она использует процессы абстрагирования, а ее деятельность основана на комбинаторных процедурах: композиции, конструировании, декомпозиции или разбиении и анализе полученных результатов. Овладение конструированием имеет огромное значение для умственного и физического развития ребенка, а также для усвоения им социального опыта. Основная цель обучения конструированию заключается в формировании общих конструктивных умений и научении приемам моделирования. Конструирование как вид продуктивной деятельности, возникает лишь на определенной ступени развития и зависит от уровня восприятия, мышления, речевого развития ребенка.

В начальной школе большое внимание уделяется конструированию в рамках урока технологии и во внеурочной деятельности. Этот вид деятельности достаточно продуктивен, поэтому учителю необходимо разрабатывать практические задания различных форм, которые помогают формированию конструктивных умений: конструирование под диктовку, по аналогии, по образцу, по собственному замыслу, по письменным или графическим описаниям изделия, по условиям, в коллективе. Кроме того, одним из эффективных средств развития конструктивных умений учащихся является деятельность в технике оригами. Оригами развивает конструктивное мышление, способность комбинировать, пространственное мышление, чувство формы, творческое воображение.

Дальнейшее формирование конструктивных умений происходит в рамках различных предметов средней и старшей школы, но мы более

подробно остановимся на геометрии, а именно на курсах планиметрии и стереометрии.

Основываясь на методической системе обучения геометрии, можно выделить несколько требований, которые затрагивают тему конструктивных умений. Во-первых, курс геометрии нацелен на развитие пространственного мышления и освоение геометрического пространства, отображающего реальное пространство и его закономерности. Во-вторых, предусматривается целенаправленная работа по формированию конструктивных определений понятий, по использованию конструктивных методов при решении задач, доказательстве утверждений.

Методические особенности, способствующие развитию конструктивных навыков, заключаются в том, что основное внимание уделяется решению задач, где ученики учатся решать базовые задачи на построение, также учитываются индивидуальные особенности и способности каждого ученика, приветствуется самостоятельная деятельность учащихся.

В учебниках по геометрии таких авторов как Атанасян Л.С. и др., Погорелов А.Н. и др. геометрические построения рассматриваются в задачах отдельного вида, которые выделены в параграфы и являются предметом специального изучения. Однако такой подход приводит к отсутствию связи между задачами на построение и другими типами задач, а также к несистематичному подходу к их решению. В результате многие ученики испытывают трудности при выполнении даже самых простых построений, которые предусмотрены учебной программой.

Основным структурным элементом учебной деятельности является учебная задача. Задачи играют важную роль в обучении геометрии. Было установлено, что при систематическом изучении нового материала через задачи обеспечивается сознательное, прочное усвоение знаний, формируется правильное отражение изучаемых фактов в сознании школьников, создаются условия для перехода знаний в действия.

Учебная задача представляет собой системное образование. Основными компонентами задачи являются цель, объекты, их характеристики, для некоторых задач – указания о способах и средствах решения, которые содержатся в открытой, но чаще скрытой форме.

Одним из компонентов формирования конструктивных умений учащихся в курсе геометрии можно выделить решение *конструктивных задач* – «задачи на построение, изображение, измерение, геометрическое конструирование и конструктивно-геометрическое моделирование».

Решение конструктивных задач должно обеспечить формирование соответствующих конструктивных умений, из которых наиболее сложным является умение решать задачи на построение пространственных фигур, их элементов и сечений. Правильное построение фигуры по условию задачи или выполнение сечения одним из известных методов с соблюдением соотношений между данными, позволяет до решения задачи сделать вывод о наличии и количестве ее решений.

Конструктивные задачи могут использоваться для определения новых свойств геометрических фигур, что способствует формированию понятий, закреплению знаний, повторению и контролю математических навыков учеников. Решение конструктивных задач требует взаимодействия различных компонентов умственной деятельности, таких как пространственное мышление, логика, метрика, интуиция, конструктивное и символическое мышление. Это соответствует содержательно-методическим линиям школьного курса геометрии.

Выделяют следующие виды задач, которые способствуют формированию конструктивных умений:

1. *Задачи на моделирование.* В данных задачах необходимо работать с геометрическим образом, который может быть представлен описанием, чертежом или моделью. Главной целью выполнения таких задач

является возможность ученика самостоятельно изобразить соответствующий геометрический образ.

Задача 1.

- а) Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны к плоскости основания?
- б) Смоделируйте пирамиду, когда основание высоты пирамиды спроектировано за основание пирамиды. Выполните рисунок. Покажите двугранный угол при основании.

2. *Задачи на конструирование.* Такие задачи могут включать классические построения с помощью циркуля и линейки, создание новых геометрических элементов, развертки геометрических тел и воссоздание объектов по образцу.

Задача 2.

Известно, что любую треугольную пирамиду с равными попарно противоположными ребрами можно разрезать вдоль трех ее ребер и развернуть так, чтобы она превратилась в треугольник без внутренних разрезов.

Возникает вопрос, существует ли другой такой выпуклый многогранник? Изобразите его и его развертку.

Задача 3.

Выберите развертку, соответствующую изображенному геометрическому телу.

3. *Задачи на доконструирование.* При решении задач возможно дополнение геометрической конструкции новыми элементами, чтобы выявить скрытые свойства данных геометрических фигур и отношений между ними.

Задача 4.

В случае правильной четырехугольной призмы, которая имеет диагональ основания, проведенную параллельно диагонали призмы,

необходимо определить площадь сечения при условии, что сторона основания равна a , а высота равна h .

В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна a , а ее высота равна h .

4. *Задачи на переконструирование.* Эта группа задач включает в себя задачи, связанные с заменой неизвестной геометрической фигуры более простой фигурой, которая имеет ту же искомую величину, что и неизвестная фигура, а также задачи на разрезание и перекраивание фигур.

Задача 5.

Пирамида имеет квадрат в качестве основания и равнобедренные треугольники в качестве боковых граней. Гражданин К. измерил угол грани при вершине $\angle AMD$ и получил значение в 100° . Гражданин П. утверждает, что такой угол быть не может. Необходимо определить, кто из них прав и привести аргументацию.

5. *Задачи на деконструирование.* Для решения таких задач необходимо выделить более простую геометрическую фигуру на сложном рисунке, игнорируя оставшиеся геометрические объекты.

Задача 6.

В пирамиде $SABCD$, в основании которой правильный четырехугольник, длина стороны AB равна a , а высота пирамиды SH равна b . Точки M и N являются серединами ребер CD и AB соответственно, а NT - высота пирамиды $NSCD$ с вершиной в N и основанием SCD . Точка T расположена на середине ребра SM . Необходимо найти расстояние между NT и SC .

6. *Задачи на реконструирование.* Для успешного решения задач данного типа требуется дополнение данной геометрической конструкции до ранее известной.

Задача 7.

На клетчатой бумаге изображены ребра правильной шестиугольной призмы. Изобразите всю призму.

Любая конструктивная задача в стереометрии может быть решена на проекционном чертеже, но перед этим она должна быть решена в уме. Построения воображаемые и на проекционном чертеже дополняют друг друга, причем первые предшествуют вторым. Конструктивную задачу в стереометрии будем считать решенной, если она сведена к решению конечного числа простейших задач.

Таблица 4

Формирование конструктивных умений при решении задач разных видов

Конструктивные умения	Задачи на					
	моделирование	конструирование	доконструирование	переконструирование	деконструирование	реконструирование
Умение распознавать геометрические фигуры на моделях и чертежах: распознавать основные виды многогранников и тел вращения; умение извлекать, преобразовывать и интерпретировать информацию фигурах, представленную на чертежах и рисунках.	+	+	+	+	+	+
Умение изображать геометрические фигуры: умение изображать изучаемые фигуры от руки и с применением простых чертёжных инструментов; выполнять изображения многогранником и тел вращения при геометрических преобразованиях.	+	+	-	+	-	+
Умение анализировать геометрические образы: выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур; решать задачи на нахождение геометрических величин, применяя известные	-	-	-	+	+	-

Конструктивные умения	Задачи на					
	моделирование	конструирование	доконструирование	переконструирование	деконструирование	реконструирование
аналитические методы.						
Умение синтезировать геометрические образы: умение объяснять способы получения многогранников и тел вращения.	+	+	-	-	-	+
Умение осуществлять геометрические построения: строить сечения многогранников и тел вращения; выполнять (выносные) плоские чертежи из рисунков простых объёмных фигур; выполнять разное проектирование фигур на плоскость.	+	+	+	+	+	+
Умение осуществлять моделирование: умение моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели.	+	-	-	+	-	+
Владение конструктивным методом определения геометрических понятий.	+	+	+	-	+	-
Владение конструктивным методом доказательства: решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин; умение доказывать геометрические утверждения.	+	+	+	+	+	-

Любая геометрическая задача решается поэтапно, стереометрическая задача не исключение. Составим схему, в которой отобразим этапы ее решения.

Поэтапное решение задач способствует вовлеченности обучающихся в деятельность, направленную на формирование конструктивных умений, которые являются неотъемлемой частью деятельности ребенка с раннего детского возраста до изучения геометрии в старших классах.

Основные принципы методики формирования конструктивных умений включают в себя:

- систематичность;
- выделение общих приемов решения геометрических задач на построение;
- использование творческих элементов в заданиях;
- активное вовлечение учеников в самостоятельную творческую деятельность;
- учет индивидуальных особенностей и возраста учащихся.

Таким образом, конструктивные умения могут быть развиты при соблюдении методических условий, таких как: способность распознавать геометрические ситуации, умение работать с простейшими геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве, использование приемов выбора, комбинирования и последовательности действий, а также применение опыта конструирования для решения геометрических задач.

Сформулируем требования, которым должен удовлетворять комплект заданий для формирования конструктивных умений:

1. Задания должны быть упорядочены от простых к сложным.
2. Каждое задание должно отражать содержание изучаемой темы.
3. Комплект заданий должен включать в себя:
 - а) краткие теоретические сведения, полученные ранее и теоретические аспекты необходимые для изучения темы;
 - б) задания для актуализации знаний и умений;
 - в) задания для первичного применения учебного материала;
 - г) тренировочные задания, нацеленные на применение полученных знаний и умений при решении заданий с добавлением нового условия;
 - д) задания, для решения которых требуется осуществить перенос умений в измененные условия, возможен творческий подход.

4. Наличие конструктивных задач разных видов.
5. Предлагаемые задания должны быть направлены на применение изученных алгоритмов, приемов, методов при решении заданий.

В процессе решения задач учащиеся развивают свое пространственное воображение, создавая целостный геометрический образ. Это позволяет им представлять геометрические фигуры как множества точек с определенными свойствами и обогащать геометрические образы, изучаемые в школьном курсе геометрии. Кроме того, это расширяет возможности для решения задач прикладного характера.

Таким образом, выделенные конструктивные умения учащихся в курсе стереометрии формируются в процессе систематического решения заданий. Формирование конструктивных умений повысит уровень подготовки учащихся в области стереометрии, в частности, поможет решить проблему с построением пространственных фигур и их элементов, что повлечет за собой более результативное решение стереометрических задач.

Выводы по Главе 1

Изучение литературных источников по теме исследования позволило рассмотреть различные подходы авторов к определению таких понятий, как умения, деятельность, конструирование, конструктивная деятельность и конструктивные умения. Проведенный контент-анализ выделенных понятий позволяет сделать вывод о том, что в данном исследовании основное определение конструктивных умений заключается в способности целенаправленно выполнять каждое из конструктивных действий, таких как умение узнавать и выделять объект, синтезировать, анализировать, видоизменять и трансформировать объект с заданными параметрами.

Во втором параграфе были рассмотрены различные классификации конструктивных умений, представленные разными авторами. Также были описаны основные виды деятельности, которые помогают развивать конструктивные умения в курсе стереометрии. Перечислены требования к

изображениям геометрических фигур. На основании исследований Тухолко Л.Л. выделены компоненты конструктивной геометрической деятельности. Были проанализированы Федеральный государственный стандарт основного и среднего общего образования и примерные рабочие программы по математике, с целью выделения планируемых предметных результатов в курсе стереометрии.

Произведено соотнесение планируемых результатов с конструктивными умениями, при формировании которых они достигаются. На основании проделанной работы конкретизирована классификация конструктивных геометрических умений, формируемых в курсе стереометрии.

Рассмотрены методы и средства формирования конструктивных умений учащихся. Выявлено, что данные умения начинают формироваться с раннего детства ребенка, когда он сооружает некоторые постройки из игрушек; далее конструктивные умения формируются через игру в дошкольном возрасте; в раннем школьном возрасте учащиеся продолжают развивать свои конструктивные умения на уроках технологии, используя различные подручные средства и материалы, а также в рамках внеурочной деятельности, например, выполняя поделки в технике оригами. Более основательное формирование конструктивных умений учащихся начинается в средней и старшей школе на уроках геометрии, где они знакомятся с теоретическими основами, связанными с фигурами на плоскости, многогранниками и телами вращения, выполняют построения этих фигур, строят комбинации их них, выполняют сечения многогранников и тел вращения. Выделены виды задач, которые являются одним из компонентов формирования конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии. Предложены этапы решения стереометрических задач. Рассмотрена основа методики формирования конструктивных умений. Сформулированы

требования, которым должен удовлетворять комплект заданий для формирования конструктивных умений.

Таким образом, первые пять задач, поставленные в данной работе, выполнены.

Глава 2. Формирование конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии

2.1. Комплект заданий для формирования умения осуществлять геометрические построения

В литературе выделяют несколько этапов формирования умения. В дополнении к этому рассмотрим критерии сформированности умения и соотнесем их с этапами, в ходе которых они достигаются.

Более подробно остановимся на разработке комплекта заданий для формирования умения осуществлять геометрические построения, а именно, умения строить сечения многогранников различными методами.

I. Формирование ориентировочной основы умения

Изучение стереометрии, работа с пространством и различными объектами в этом пространстве влечет за собой формирование пространственного представления, мышления, воображения, что необходимо каждому человеку в независимости от рода его деятельности. Построение сечений многогранников и тел вращения – одна из основных тем курса стереометрии, которая способствует формированию пространственного представления и ряда умений, формирование которых предполагается по ФГОС.

Сечением геометрической фигуры является плоскость, следовательно, перед тем как начинать изучение темы, связанной с построением сечений, ученик должен понимать, чем определяется плоскость: тремя точками; прямой и точкой; двумя параллельными прямыми; двумя пересекающимися прямыми.

Также важно знать три аксиомы стереометрии, на которые опирается построение сечения многогранника по трем заданным точкам:

1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, притом только одна.

2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

Существуют несколько способов построения сечений многогранников, цилиндров, конусов плоскостью. Наиболее часто используемыми из них являются метод следов и метод внутреннего проектирования.

Суть метода следов заключается в том, что, во-первых, необходимо построить след секущей плоскости (прямая, по которой секущая плоскость α пересекает плоскость β) на плоскость, содержащей одну из граней многогранника; во-вторых найти точки пересечения следа секущей плоскости с прямыми, содержащими ребра той грани многогранника, в плоскости которой находится след.

Для успешного овладения построения сечений многогранников данным методом учащийся должен уметь:

- строить параллельную и центральную проекцию точки на плоскость;
- строить точку пересечения прямой и плоскости;
- построив две точки пересечения прямой и плоскости, получать след;
- получать дополнительные точки в гранях многогранника, используя след.

Для актуализации знаний можно предложить учащимся для решения следующие задания, которые способствуют повторению вспомогательных умений.

Задания для актуализации знаний

Задание 1. Построить проекции точек A, B, C на плоскость α с центром проекции в точке S . При условии, что точки A, B, C лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость α по прямой m .

Задание 2. Построить проекции точек A, B, C на плоскость α параллельно прямой k . При условии, что точки A, B, C и прямая k лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость α по прямой m .

Задание 3. В правильном тетраэдре построить проекции точек K, L, M на плоскость ABD . Центр проекции – вершина C .

Задание 4. В правильной шестиугольной призме построить проекции точек K, L, M, N, Q, H на плоскость верхнего основания призмы $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ параллельно ребру BB_1 .

Задание 5. Описать взаимное расположение прямой и плоскости.

Таблица 5

а) $SABC - \angle$ тетраэдр.	б) $ABCD A_1B_1C_1D_1 - \angle$ параллелепипед.
1) $DF \perp ABC$; 2) $FG \perp $; 3) $DE \perp SBC$; 4) $EG \perp SAC$.	1) $FH \perp BB_1C$; 2) $HG \perp ABC$; 3) $EG \perp AA_1B$; 4) $EF \perp DD_1C$.

Задание 6. Построить точку пересечения прямой и плоскости.

Таблица 6

а) $SABCD - \angle$ прямоугольная пирамида	б) $ABC A_1B_1C_1 - \angle$ треугольная призма.
1) $GI \perp ABC$; 2) $EF \perp SBC$; 3) $IH \perp ABC$;	4) $FH \perp SAD$; 5) $GK \perp SCD$; 6) $FK \perp SAD$.
1) $IH \perp AA_1B$; 2) $DJ \perp ABC$; 3) $EJ \perp A_1B_1C_1$; 4) $DE \perp BB_1C$;	5) $GF \perp AA_1B$; 6) $EF \perp BB_1C$; 7) $GJ \perp A_1B_1C_1$; 8) $HJ \perp ABC$.

Алгоритм построения сечений многогранника методом следов плоскостью, проходящей через три точки

Путь необходимо построить секущую плоскость, проходящую через точки M, N, K .

1. Выбрать две прямые из трех (MK, MN, NK) и построить точки X, Y пересечения этих прямых с плоскостью основания, используя центральное или параллельное проектирование:
 - а) центральное проектирование используется для построения точки пересечения прямой с плоскостью в пирамиде;
 - б) параллельное проектирование используется в призме.
2. Построить прямую XU – след секущей плоскости на плоскость основания.
3. Найти боковую грань, которой принадлежит одна из заданных точек, и ребро a этой грани, лежащее в плоскости основания. Построить точку пересечения прямой, содержащей это ребро, со следом XU .
4. Построить прямую (она лежит в плоскости выделенной в п.3 грани) и выделите ее отрезок, лежащий в этой боковой грани, данный отрезок – одна из сторон сечения. Концы этого отрезка являются дополнительными точками сечения в соседних гранях.
5. Продолжить построение сечения, переходя на соседнюю грань и используя уже построенные точки. При этом, если в грани имеются две точки, принадлежащие сечению, то проводим через них прямую и выделяем отрезок этой прямой, лежащий в грани; если в грани только одна точка, принадлежащая сечению, то используем след (см. п.2, 3).
6. Достаиваем и получаем искомое сечение.

Замечание. При построении сечений методом следов след секущей плоскости можно строить в любой грани многогранника.

Пример использования алгоритма

Необходимо построить сечение пятиугольной призмы плоскостью KMP , если K принадлежит ребру верхнего основания, M – ребру нижнего основания, P – боковому ребру.

Построение:

- 1) Точки K_0 и P_0 проекции точек K и P на плоскость основания призмы.

- 2) $KP \cap K_0P_0 = Y$.
- 3) $M = X \Rightarrow MY - i$ след.
- 4) $MY \cap BC = L$.
- 5) Через т.К проводим прямую параллельно MY , до пересечения с JF в точке N .
- 6) $MY \cap RB = O, NO \cap BF = Q$.
- 7) Соединяем, построенные точки и получаем $KPMQN - i$ искомое сечение.

Получив нужное сечение, необходимо проверить его корректность построения. Можно осуществить это, опираясь на несколько признаков:

- сечением многогранника должен быть многоугольник, то есть замкнутая ломаной линия;
- каждая сторона сечения должна лежать на грани многоугольника;
- две смежные стороны сечения не могут принадлежать ни одной грани многогранника;
- параллельные грани многогранника должны пересекаться секущей плоскостью по параллельным прямым.

Учащиеся могут попрактиковаться в определении корректности построения сечения многогранника, выполняя задания подобного типа.

Задание. Определите являются ли закрашенные фигуры сечениями изображенных многогранников. Объясните свой ответ.

II. Первичное применение учебного материала при самостоятельном выполнении заданий.

На данном этапе учебную деятельность удобнее организовать следующим образом (таблица 7):

Таблица 7

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
1. Организует этап актуализации знаний и умений, необходимых для изучения метода следов (см. этап I).	1. Повторяют необходимый теоретический материал, представленный учителем или самостоятельно, используя учебник.

2. Знакомит учащихся с алгоритмом построения сечений методом следов, демонстрируя его применение на конкретном примере (см. этап I).	2. Конспектируют алгоритм построения сечения методом следов, переносят пример, предложенный учителем, в тетради.
3. Совместно с учащимися решает 2-3 задания на применение алгоритма.	3. Совместно с учителем решают задачи, отвечают на / задают вопросы.
4. Организует самостоятельную работу учащихся по решению аналогичных задач.	4. Самостоятельно решают аналогичные задачи.
5. Контролирует самостоятельную работу учащихся, отвечает на вопросы, индивидуально помогает справиться с затруднениями.	5. Задают вопросы, индивидуально работают с учителем.

Задание для совместного решения

Задание. Построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через данные точки M, K, L .

Построение (а):

- 1) Точки AuD проекции точек LuM , соответственно, на плоскость основания.
- 2) $LM \cap AD = Y$.
- 3) KY – ζ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $KY \cap CD = P$.
- 5) Соединяем точки $K, L, MuP, KLMP$ – ζ искомое сечение.

Построение (б):

- 1) Точки K_0, CuD проекции точек K, LuM соответственно, на плоскость основания.
- 2) $KL \cap K_0C = X, ML \cap CD = Y$.
- 3) XY – ζ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $XY \cap AD = I, MI \cap EH = J$.
- 5) Соединяем точки $K, L, MuJ, KLMJ$ – ζ искомое сечение.

Построение (в):

- 1) Точки F, DuC проекции точек K, MuL соответственно, на плоскость основания.
- 2) $ML \cap DC = X, KL \cap FC = Y$.
- 3) XY – ζ след секущей плоскости в плоскости основания.

- 4) $BC \cap XY = H, HL \cap GB = I.$
- 5) $AB \cap XY = N, \epsilon \cap AG = Q.$
- 6) Аналогично п. 4-5 строим точку $P.$
- 7) Соединяем точки K, P, M, L, I и $Q. KPMLIQ$ – искомое сечение.

Задание для самостоятельного решения

Задание. Построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через данные точки $M, K, L.$

Таким образом, данный этап формирования умения предполагает отработку алгоритма построения сечений многогранника методом следов, то есть учащиеся сначала выполняют построения под руководством учителя (совместно с ним), далее самостоятельно по образцу.

III. Тренировочные задания.

На данном этапе формирования умения целесообразно предложить учащимся для решения задачи не на готовых чертежах, а текстовые задачи, где необходимо самостоятельно построить многогранник и выбрать или отметить необходимые точки для построения сечения.

Задания для совместного решения

Задание 1. Постройте сечение треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середины ребер $A A_1, B_1 C_1$ и вершину $B;$
- б) середины ребер $AB, A_1 C_1$ и $C C_1;$
- в) середины ребер $A A_1, A_1 C_1$ и центр основания $ABC;$

Построение (а):

- 1) Точки A и F проекции точек M и $E,$ соответственно, на плоскость основания призмы.
- 2) $AF \cap ME = G.$
- 3) GB – след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $AC \cap GB = H, MH \cap A_1 C_1 = I.$
- 5) Соединяем точки $M, B, E, I. MBEI$ – искомое сечение.

Построение (б):

- 1) Точки CuH проекции точек GuF , соответственно, на плоскость основания призмы.
- 2) $HC \cap FG = I$
- 3) $EI - \dot{\iota}$ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $EI \cap BC = J$.
- 5) Через т. F проведем прямую параллельно следу EJ до пересечения с A_1B_1 в точке K .
- 6) Соединим точки E, J, G, F, K . $EJGFK - \dot{\iota}$ искомое сечение.

Построение (в):

- 1) Точки AuF_1 проекции точек EuF , соответственно, на плоскость основания призмы.
- 2) $AF_1 \cap EF = J$.
- 3) $IJ - \dot{\iota}$ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $IG \cap AB = K, IG \cap BC = M$.
- 5) Через т. F проведем прямую параллельно следу IJ до пересечения с B_1C_1 в точке L .
- 6) Соединим точки E, F, L, M, K . $EFLMK - \dot{\iota}$ искомое сечение.

Задание 2. Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью, определяемой точками: M – на стороне основания, P – на боковом ребре, $Q - \dot{\iota}$ на продолжении другого бокового ребра.

Построение (при данном выборе точек):

- 1) Точки BuD проекции точек QuP , соответственно, на плоскость основания.
- 2) $BD \cap QP = G$.
- 3) $MG - \dot{\iota}$ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $MG \cap BC = H$.
- 5) $MG \cap CD = I, PI \cap CF = J$.
- 6) $MG \cap ED = K, KP \cap FE = L$.

7) Соединяем точки M, H, J, P, L . $MHJPL$ – искомая плоскость.

Задание 3. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, заданной точкой на продолжении диагонали основания и двумя точками на боковых ребрах.

Построение (при данном выборе точек):

- 1) Точки A и C проекции точек G и F , соответственно, на плоскость основания параллелепипеда.
- 2) $AC \cap FG = H$.
- 3) EH – след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $EH \cap BC = J, FJ \cap BB_1 = L$.
- 5) $EH \cap AD = I, IG \cap DD_1 = K$.
- 6) Соединим точки L, F, K, G . $LFKG$ – искомое сечение.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Основание пирамиды $SABCD$ – параллелограмм $ABCD$.

Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середины ребер AB, BC и SD ;
- б) середины ребер AD, SC и точку B ;
- в) середины ребер AB, AD и SC .

Задание 2. Постройте сечение треугольной пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через следующие точки:

- а) середину ребра AD и точки L и M , лежащие на продолжениях ребер AB и AC за точки B и C ;
- б) середины ребер BC, AD и точку L , лежащую на продолжении ребра AC за точку C ;
- в) середины ребер BC, CD и точку, лежащую на медиане DM грани ABD .

Задание 3. Построить сечение шестиугольной призмы плоскостью MPQ , если M принадлежит боковому ребру, P – продолжению другого бокового ребра, Q – ребру верхнего основания.

Задание 4. Построить сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точку на боковом ебре и две точки вне пирамиды.

Задание 5. Построить сечение наклонного параллелепипеда плоскостью KMP , если K и M принадлежат двум различным боковым граням, а P – i боковому ребру.

Задание 6. Построить сечение шестиугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки двух различных боковых ребер и точку боковой грани, не содержащей выбранные ребра.

Задание 7. Построить сечение пятиугольной пирамиды плоскостью KMP , если K и M лежат на продолжениях двух различных боковых ребер, а P – i на третьем боковом ребре.

При проведении уроков геометрии можно использовать различные тренировочные задания, которые направлены на отработку построения сечения параллельного определенной прямой или плоскости. В результате, учащиеся смогут лучше понимать геометрические фигуры и более эффективно решать задачи, связанные с геометрией. Таким образом, применение заданий на построение сечения параллельного данной прямой или плоскости является одним из инструментов, способствующих лучшему усвоению материала и развитию геометрических навыков учащихся.

Перед тем, как приступить к решению задач данного типа, ученикам следует освежить свои знания о признаках параллельности прямых и плоскостей. Это поможет им более эффективно справляться с заданиями. Обучающий процесс может включать не только теоретическое объяснение, но и практические упражнения. Для того, чтобы адекватно оценить знания учеников, можно провести устный опрос и подобрать несколько заданий или задач, которые можно использовать для демонстрации применения данных признаков в их решении.

Задания для совместного решения

Задание 1. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через две заданные точки M и P , параллельно заданной прямой KT .

Замечание. Рекомендуется рассмотреть два случая: прямая $KT - \dot{\iota}$ лежит в основании многогранника или параллельна ему; $KT - \dot{\iota}$ пересекает плоскость основания.

Построение (а):

- 1) Строим точку V пересечения прямой MP с плоскостью основания призмы:
 - а) $M_0, P_0 - \dot{\iota}$ проекции точек M, P , соответственно, на плоскость основания призмы;
 - б) $MP \cap M_0 P_0 = V$.
- 2) Через т. V проводим прямую параллельную KT , получили след секущей плоскости в плоскости основания.
- 3) $SK \cap \text{след} = L, PL \cap K K_0 = S, PL \cap C C_0 = Q$.
- 4) $QM \cap N N_0 = O$.
- 5) Через т. S проводим прямую параллельно следу до пересечения с ребрами $K K_0, T T_0$ в точках S, W , соответственно.
- 6) $UT \cap \text{след} = V, WV \cap U U_0 = Z$.
- 7) Соединим точки S, Q, O, Z, W . $SQOZW - \dot{\iota}$ искомое сечение.

Построение (б):

- 1) Через точки M и P проведем прямые параллельные KT .
- 2) Находим точки X и Y пересечения этих прямых с плоскостью основания:
 - а) точки $M_0, P_0 - \dot{\iota}$ проекции точек M, P , соответственно, на плоскость основания;
 - б) прямая, проходящая через т. M пересекает $K M_0$ в точке X ;
 - в) прямая, проходящая через т. P пересекает $K P_0$ в точке Y .
- 3) $XY - \dot{\iota}$ след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $XY \cap AK = G, XY \cap BC = D$.

- 5) $DP \cap TB = E, ME \cap AT = F$.
- 6) Соединим точки G, D, E, F . $GDEF$ – искомое сечение.

Задание 2. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку M , параллельно заданной плоскости KTP .

Замечание. Рекомендуется рассмотреть два случая: плоскость KTP – секущая плоскость многогранника; KTP не является секущей плоскостью многогранника.

Построение (а):

- 1) Построим сечение многогранника плоскостью TPK :
 - а) TK – след секущей плоскости в плоскости основания призмы;
 - б) $AE \cap TK = D, PD \cap EJ = N$;
 - в) $AB \cap TK = F, FP \cap BG = L$;
 - г) соединим точки T, L, P, N, K . $TLPNK$ – секущая плоскость.
- 2) Строим сечение, проходящее через точку M , параллельно секущей плоскости $TLPNK$:
 - а) через точку M проведем прямую параллельно LP до пересечения с GP и BG в точках U и O , соответственно;
 - б) аналогично строим $VS \parallel PN, SR \parallel NK, QR \parallel TK, OQ \parallel <$;
 - в) соединяем точки Q, O, U, V, S, R . $QOUVSR$ – искомое сечение.

Построение (б):

- 1) M_0 проекция точки M на плоскость основания пирамиды.
- 2) Через точку M проведем прямые параллельные KP и KT ; эти прямые пересекают плоскость основания в точках Y и X , соответственно.
- 3) XY – след секущей плоскости в плоскости основания.
- 4) $XY \cap BT = A, XY \cap DP = E$.
- 5) $CD \cap XY = F, MF \cap KD = J, MF \cap KC = G$.
- 6) $BC \cap XY = H, HG \cap KB = I$.
- 7) Соединяем точки A, I, G, J, E . $AIGJE$ – искомое сечение.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через две заданные точки M и P , параллельно заданной прямой KT .

Задание 2. Постройте сечение многогранника плоскостью, проходящей через заданную точку M , параллельно заданной плоскости KTP .

Задание 3. На ребрах BB_1, CD и CC_1 призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ заданы соответственно точки P, Q и R , на ребре AA_1 точка K . Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку K , параллельно плоскости PQR .

IV. Применение умения по типу все более отдельного переноса

В процессе обучения, умение не может быть сведено только к знанию способа действия или приема. Помимо этого, требуется реализация в деятельности ученика. Недостаточно следовать по образцу, который дал учитель. Конструирование своей деятельности является необходимым элементом умения. Ученик должен проявлять инициативу, находя новые способы решения учебной задачи, что является переносом умения. Такой перенос умения происходит, когда ученик способен самостоятельно выполнять известный тип задачи в новых условиях и с новым учебным материалом.

Формирование умения учащихся понимать и решать задачи, связанные с построением сечений призм и многогранников, является очень важным процессом в обучении геометрии. На данном этапе формирования умения, для эффективного расширения знаний учащихся, можно предложить такие задания:

- решить задачу, при решении которой удобнее строить след секущей плоскости на плоскость верхнего основания призмы; при этом учащиеся должны самостоятельно строить сечение, применяя изученный метод (задания 1-3);
- решить задачу, где в условии не требуется построение сечения, но оно необходимо для решения задачи (задания 4-8);

- применение метода следов при построении сечений невыпуклых многогранников. В этом случае, учащиеся осознают важность данного метода и научатся применять его для решения задач, связанных с построением сечений сложных многогранников (задание 9).

Таким образом, решение заданий на построение сечений многогранников является важным этапом в формировании умений учащихся в области геометрии. Оно позволяет им развивать свои навыки и креативное мышление в решении задач, а также позволяет им лучше понимать принципы геометрических фигур и их взаимосвязь.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки M, N и K на ребрах $AB, A_1 D_1$ и $C_1 D_1$, соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью MNK .

Задание 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ построить сечение плоскостью, проходящей через точки B, D_1, F_1 .

Задание 3. Построить сечение шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, проходящей через точки S, T, K , где точка S лежит на продолжении стороны AA_1 за точкой A_1 , точка T на продолжении стороны $B_1 C_1$ за точкой C_1 , точка K на продолжении стороны DD_1 за точкой D .

Построение (пример для учителя):

- 1) A_1 и D_1 проекции точек S и K на плоскость верхнего основания призмы.
- 2) $A_1 D_1 \cap SK = G$.
- 3) $l-l$ след секущей плоскости на плоскость верхнего основания призмы.
- 4) $l \cap C_1 D_1 = I, l \cap A_1 F_1 = H$.
- 5) $SH \cap AF = L$.
- 6) Через точку L проводим прямую параллельную HI . $HI \cap CD = M$.
- 7) Соединим точки I, H, L, M . $IHLM - l$ искомое сечение.

Задание 4. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах $AA_1, CC_1, C_1 D_1$ соответственно отмечены точки M, N, P . Причем

$AA_1:AM=C_1C:C_1N=C_1D_1:C_1P=5:4$. Постройте точку пересечения плоскости MNP с прямой BC .

Построение (пример для учителя):

- 1) A_1 и C_1 проекции точек M и N соответственно на плоскость верхнего основания призмы.
- 2) $A_1C_1 \cap MN = E$.
- 3) EP — след секущей плоскости на плоскость верхнего основания призмы.
- 4) $EP \cap A_1D_1 = F$.
- 5) $A_1B_1 \cap EP = G, GM \cap AB = H$.
- 6) $B_1C_1 \cap EP = I, I \in BC = J$.
- 7) Получили сечение призмы плоскостью $FPNJHM$. По построению J точка пересечения плоскости MNP с прямой BC .

Задание 5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 5. Точки P, Q, R отмечены на ребрах SA, AB, BC соответственно так, что $PA=AQ=RC=2$. Докажите, что ребро SD и плоскость PQR перпендикулярны.

Доказательство (пример для учителя):

- 1) Построим сечение пирамиды плоскостью PQR методом следов.
- 2) Стороны треугольника SBD равны $5, 5, 5\sqrt{2}$, по теореме обратной теореме Пифагора получаем, что ΔSBD прямоугольный: $SD \perp SB$.
- 3) Т.к. ΔASB и ΔAPQ — равнобедренные $\Rightarrow SB \parallel PQ$ как стороны равнобедренных треугольников с общим углом $\Rightarrow SD \perp PQ$.
- 4) $AC \perp BD$ (т.к. пирамида правильная), следовательно по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp SD \Rightarrow QR \perp SD$.

Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна SD .

Задание 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12, точки K и L — середины ребер AD и $C_1 D_1$ соответственно, точка F отмечена на ребре BC , так что

$CF:BF=3:1$. Докажите, что плоскость KLF делит диагональ AC основания $ABCD$ в отношении $2:3$, считая от точки A .

Доказательство (пример для учителя):

- 1) Построим сечение пирамиды плоскостью KLF методом следов.
- 2) Сделаем выносной чертеж.
- 3) Рассмотрим квадрат $ABCD$: $KF \cap AC = M$; $\triangle CFM \sim \triangle AKM$ с коэффициентом подобия $k = CF:AK = 3:2 \Rightarrow AM:MC = 3:2$.
- 4) Таким образом AC делится плоскостью KLF в отношении $2:3$.

Задание 7. $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная шестиугольная призма. Точки K, L, M — середины ребер EF, CD, BB_1 соответственно, $AB=1, AA_1=2\sqrt{3}$. Плоскость KLM делит ребро FF_1 в отношении $1:5$, считая от точки F . Найдите расстояние от центра основания $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ до плоскости KLM .

Решение (пример для учителя):

- 1) Построим сечение пирамиды плоскостью KLM методом следов.
- 2) R, S — середины сторон MJ и LK соответственно.
- 3) Опустим перпендикуляр PU на RS , он лежит в плоскости, содержащей высоту призмы PQ , перпендикулярной нижнему основанию, в частности KL .
- 4) Т.о. $PU \perp KL, PU \perp (KLM), PU$ — искомое расстояние.
- 5) $\triangle PUT \sim \triangle TQS$ (по двум углам: $\angle H = \angle Q = 90^\circ, \angle T$ — общий) \Rightarrow

$$\frac{PU}{PT} = \frac{SQ}{ST} \Leftrightarrow PU = \frac{PT \cdot SQ}{ST}.$$

$$6) \quad SQ = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} DE = \frac{\sqrt{3}}{4} AB = \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad QT = \frac{1}{6} PQ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad PT = \frac{5}{6} PQ = \frac{5\sqrt{3}}{3};$$

$$ST = \sqrt{SQ^2 + QT^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{12}.$$

$$7) \quad PU = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{5\sqrt{3}}{12}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задание 8. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 3. Через середины сторон $A_1 D_1, C_1 D_1$ и вершину B проведено сечение. Найдите объем пирамиды, основанием которой является сечение, а вершиной точка D .

Решение (пример для учителя):

- 1) Построим сечение пирамиды плоскостью BNM методом следов.
- 2) Построим искомую пирамиду и вычислим ее объем.
- 3) $BPMNQ$ – основание пирамиды: $S_{BPMNQ} = S_{BPTQ} - S_{TMN}$.
- 4) $MN \cap BT = L, MN \perp (BDT) \Rightarrow MN \perp BT$.
- 5) $\triangle PC_1M = \triangle TD_1M$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам)
: $D_1M = MC_1, \angle C_1 = \angle D_1 = 90^\circ, \angle TMD_1 = \angle C_1MP$.
- 6) $TD_1 = PC_1 = 1, MN = MD_1\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, D_1L = NL = ML = \frac{3\sqrt{2}}{4}, TL = \sqrt{TD_1^2 + D_1L^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}$.
- 7) $S_{TMN} = \frac{1}{2}MN \cdot TL = \frac{3\sqrt{17}}{8}$.
- 8) Т.к. $PM = MT = TN = NQ \Rightarrow MN \parallel BT$.
- 9) $S_{BPTQ} = 2S_{TDQ} = 8S_{TMN}, S_{BPMNQ} = 7S_{TMN} = \frac{21\sqrt{17}}{8}$.
- 10) Из точки D опустим перпендикуляр на BT . DH – высота пирамиды.
- 11) $BD = 3\sqrt{2}, BT = 4TL = \sqrt{34}, DT = DD_1 + D_1T = 4, DH = \frac{BD \cdot DT}{BT} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$.
- 12) $V = \frac{1}{3}S_{BPMNQ} \cdot DH = \frac{1}{3} \cdot \frac{21\sqrt{17}}{8} \cdot \frac{12\sqrt{17}}{17} = 10,5$.

Ответ: 10,5.

Задание 9. Постройте сечение невыпуклого многогранника, проходящее через три заданные точки, используя метод следов.

Таким образом, тщательное и последовательное выполнение прописанных выше рекомендаций и заданий является залогом успешного формирования умения выполнять геометрические построения, а именно, сечения многогранников. В ходе решения предложенных заданий учащиеся выполняют выносные плоские чертежи из объемных фигур, выполняют

параллельное и центральное проектирование необходимых объектов, что также способствует формированию выбранного умения.

На первом этапе учащиеся знакомятся с целью выполнения действий, что построение сечений многогранников – одна из основных тем курса стереометрии, которая способствует формированию пространственного представления и ряда умений, необходимых для усвоения школьниками. Для осуществления этой цели, учащиеся изучают суть метода следов, основные признаки правильности конструкции сечений многогранников, актуализируют теоретические знания, которые укрепляют, выполняя практические задания. Рассматривают применение построения сечения многогранника данным методом на конкретном примере. Кроме того, процесс тренировки на определение верно и неверно выполненных сечений, основываясь на признаках и обосновывая свой ответ, существенно обогащает опыт учащихся в области геометрии.

В целом, тщательное и последовательное выполнение прописанных выше рекомендаций и заданий является залогом успешного формирования умения выполнять геометрические построения.

Далее, на этапе первичного применения учебного материала учитель приводит учащимся образец применения рассмотренного алгоритма при решении нескольких заданий на готовых чертежах, затем учащиеся выполняют аналогичные задания самостоятельно, отработывая алгоритм построения сечения методом следов.

Третий этап – тренировочный, этап применения изученного материала в новых условиях. Во-первых, учащимся предлагаются для выполнения задания, в которых они самостоятельно выполняют чертеж и выбор необходимых точек с последующим построением сечения. Во-вторых, вводится новое условие: построение сечения, параллельного прямой или плоскости, и предлагается применить известный алгоритм при решении заданий с данным условием. Данный этап нацелен на многократное

повторение усвоенных действий и алгоритмов, рациональный выбор действий со стороны ученика и самоанализ деятельности.

Заключительный этап подразумевает самостоятельный перенос усвоенного материала в новые условия. Предложенные выше задания способствуют организации данного этапа.

Поэтапное формирование способствует выполнению всех критерий сформированности умения, что наглядно прослеживается.

Форма организации учебной деятельности, предложенная в ходе описания комплекта заданий, может варьироваться по желанию учителя, в зависимости от психолого-педагогической характеристики класса. Аналогичным образом можно организовать деятельность по изучению построения сечений многогранников методом внутреннего проектирования, комбинированным методом и др.

2.2. Комплект заданий для формирования умения владеть конструктивным методом определения геометрических понятий

Конструктивный метод определения геометрических понятий заключается в создании геометрической конструкции, которая отображает определяемое понятие.

Остановимся на рассмотрении понятия общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым. В курсе стереометрии учащиеся знакомятся с определением скрещивающихся прямых, учатся определять скрещивающиеся прямые, но понятие общего перпендикуляра им не вводится и задачного материала на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми методом нахождения длины общего перпендикуляра, соответственно нет. Умение определять скрещивающиеся прямые и находить расстояние между ними одно из основных, так как задачи данного содержания встречаются в ЕГЭ профильного уровня.

Рассмотрим введение выбранного понятия конструктивным методом, предложим некоторые задания для развития данного умения.

I. Формирование ориентировочной основы умения

Изучение стереометрии в 10 классе начинается с изучения параллельности прямых и плоскостей, далее рассматривается взаимное расположение прямых в пространстве, куда входит определение понятия скрещивающихся прямых.

Перед тем как приступать, непосредственно, к изучению общего перпендикуляра к скрещивающимся прямыми необходимо организовать деятельность учащихся, в ходе которой они актуализируют теоретический материал по темам, связанным с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве, подкрепив его выполнением некоторых практических заданий.

Задания для актуализации знаний

Задание 1. Определите взаимное расположение выделенных прямых.

Задание 2. Изобразите куб, тетраэдр, четырехугольную пирамиду и треугольную призму. Для каждой фигуры выпишите пары скрещивающихся прямых.

Задание 3. Точка E – середина ребра SC правильной пирамиды $SABCD$, высота SO которой равна стороне основания. Опустите перпендикуляры из точки E на следующие прямые: а) BD ; б) SA ; в) AD .

Как было упомянуто выше немаловажным является умение находить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми. Мы рассмотрим нахождение искомого расстояния с помощью построения общего перпендикуляра с последующим нахождением его длины.

Алгоритм построения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым

Таблица 8

1. Скрещивающиеся прямые a и b перпендикулярны	2. Скрещивающиеся прямые a и b не перпендикулярны
--	---

1) Определяем плоскость $\alpha: a \in \alpha$; 2) строим $\beta: b \in \beta, \beta \perp \alpha$; 3) $b' = \alpha \cap \beta$; 4) $b' \cap a = P$; 5) в плоскости β строим прямую $n: P \in n, n \perp b$; 6) $n \cap b = Q$. $PQ - \dot{i}$ искомый перпендикуляр.	1) Определяем плоскость $\alpha: a \in \alpha$, $\alpha \parallel b$; 2) строим $\beta: b \in \beta, \beta \perp \alpha$; 3) $b' = \alpha \cap \beta$; 4) $b' \cap a = P$; 5) в плоскости β строим прямую $n: P \in n, n \perp b$; 6) $n \cap b = Q$. $PQ - \dot{i}$ искомый перпендикуляр.
--	--

II. Первичное применение учебного материала при самостоятельном выполнении заданий.

После того, как учащиеся повторяют необходимый теоретический материал, выполняют задания для актуализации знаний и ознакомятся с алгоритмом, рекомендуется следующим образом организовать учебную деятельность. Во-первых, учителю необходимо предложить учащимся задания для самостоятельного решения, направленные на применение алгоритма (если какие-то учащиеся не смогут справиться с данным заданием, то учитель в индивидуальном порядке проконсультирует их по решению задания). Во-вторых, после того, как учащиеся с помощью алгоритма получат геометрическую конструкцию, в которой отображен общий перпендикуляр, попросить их сформулировать определение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым. В-третьих, учителю необходимо скорректировать ответы учащихся и ознакомить их с необходимым теоретическим материалом по данной теме. После чего, учащиеся смогут продолжить самостоятельное выполнение аналогичных заданий.

Задания для самостоятельного решения (первичное применение алгоритма)

Задание. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1 - \dot{i}$ куб. Построить общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым: а) AC и $A_1 B$; б) $A_1 B_1$ и CD_1 .

Построение (а):

Прямые AC и A_1B — перпендикулярны, следовательно, воспользуемся алгоритмом 1.

- 1) $A_1B \in \alpha, AC \in \beta, \alpha \perp \beta$;
- 2) $\alpha \cap \beta = AB$;
- 3) $AB \cap A_1B = B$;
- 4) $B \in BD, BD \perp AC$;
- 5) $BD \cap AC = Q$

BQ — искомый перпендикуляр.

Построение (б):

Прямые A_1B_1 и CD_1 не перпендикулярны, следовательно, воспользуемся алгоритмом 2.

- 1) $CD_1 \in \alpha, \alpha \parallel b$;
- 2) $A_1B_1 \in \beta, \beta \perp \alpha$;
- 3) $\alpha \cap \beta = C_1D_1$;
- 4) $C_1D_1 \cap CD_1 = D_1$;
- 5) $D_1 \in A_1D_1, A_1D_1 \perp A_1B_1$;
- 6) $A_1D_1 \cap A_1B_1 = A_1$;

A_1D_1 — искомый перпендикуляр.

Задания для самостоятельного решения

Задание. $ABCD A_1B_1C_1D_1$ — куб. Построить общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым:

Таким образом, на данном этапе учащиеся создают геометрическую конструкцию, используя алгоритм, получают наглядное представление общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым, и на ее основе формулируют определение данного понятия.

III. Тренировочные задания.

В качестве тренировочных заданий можно предложить учащимся выполнить построение общего перпендикуляра в других многогранниках, а

также задания на вычисление длины этого перпендикуляра, то есть нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

На данном этапе задания учащиеся могут выполнять самостоятельно, при возникновении трудностей обращаясь к учителю. Либо, на усмотрение педагога, можно некоторые задания решить совместно.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Построить общий перпендикуляр к двум противоположным ребрам правильного тетраэдра.

Задание 2. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ построить общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым: а) $A A_1$ и BC ; б) AB и $B_1 C_1$.

Задание 3. В правильной шестиугольной призме $ABC \stackrel{\text{def}}{=} A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ построить общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым: а) $A_1 F$ и $B B_1$; б) $F F_1$ и $C_1 D_1$.

Построение (а):

- 1) Прямые $A_1 F$ и $B B_1$ не перпендикулярны, следовательно, воспользуемся алгоритмом 2.
- 2) $B B_1 \in \alpha, \alpha \parallel b$;
- 3) $A_1 F \in \beta, \beta \perp \alpha$;
- 4) $\alpha \cap \beta = GH$;
- 5) $GH \cap B B_1 = P$;
- 6) $P \in PQ, PQ \perp A_1 F$;

PQ – искомый перпендикуляр.

Построение (б):

- 1) Прямые $F F_1$ и $C_1 D_1$ перпендикулярны, следовательно, воспользуемся алгоритмом 1.
- 2) $F F_1 \in \alpha, C_1 D_1 \in \beta, \alpha \perp \beta$;
- 3) $\alpha \cap \beta = DD_1$;
- 4) $C_1 D_1 \cap DD_1 = D_1$;

- 5) Через точку D_1 проводим прямую перпендикулярную FF_1 до пересечения в точке F_1 .

D_1F_1 – искомый перпендикуляр.

Задание 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ построить общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым:

- а) SO и MN , где SO – высота пирамиды, опущенная в центр основания, а MN – средняя линия грани SDC ;
 б) AC и SH , где SH – высота грани $|\cdot|$

Построение (а):

- 1) Прямые SO и MN – перпендикулярны, следовательно, воспользуемся алгоритмом 1.
- 2) $SO \in \alpha, MN \in \beta, \alpha \perp \beta$;
- 3) $\alpha \cap \beta = SF$;
- 4) $SF \cap MN = P$;
- 5) Через точку P проводим прямую перпендикулярную SO до пересечения в точке Q .

PQ – искомый перпендикуляр.

Задание 5. Найдите расстояние между прямыми AC и BS .

Решение:

- 1) Строим общий перпендикуляр DF по алгоритму 1.
- 2) Рассмотрим $\triangle DBS: BS = 6, BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$, аналогично $SD = \sqrt{27}$.
- 3) $DF = \sqrt{(\sqrt{27})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Задание 6. Найти расстояние между прямыми AS и BD .

Решение:

- 1) Строим общий перпендикуляр SO по алгоритму 1.
- 2) Рассмотрим $\triangle ACD: AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.
- 3) Рассмотрим $\triangle ASO: AS = 3, AO = 2\sqrt{2}, SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{9 - 8} = 1$.

Ответ: 1.

IV. Применение умения по типу все более отдельного переноса

Один из типов заданий по стереометрии на ЕГЭ по математике профильного уровня – это задачи на нахождение расстояния между двумя прямыми, в ряде некоторых из них необходимо вычислить расстояние, именно, между скрещивающимися прямыми. Известно несколько способов решения подобных задач, один из них – это нахождение длины общего перпендикуляра. Трудность в применении данного способа может заключаться только в построении искомого перпендикуляра, а вычисление его длины чаще всего сводится к решению планиметрической задачи с несложными вычислениями.

На заключительном этапе формирования выбранного умения целесообразно предложить учащимся для решения более сложные задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, а также несколько экзаменационных задач, так как для учащихся выпускных классов данная работа будет достаточно полезна и актуальна.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $\sqrt{6}$ найдите расстояние между $A_1 B$ и AC_1 .

Решение:

- 1) Построим общий перпендикуляр FG по алгоритму 1.
- 2) Из $A_1 B_1 B$ находим $A_1 B = 2\sqrt{3} \Rightarrow A_1 E = \sqrt{3}$.
- 3) Рассмотрим $\Delta A_1 B E$: $BE = \sqrt{12 - 3} = 3$.
- 4) $\Delta A_1 B E \sim \Delta BGF$ (по двум углам): $GF = \frac{BG \cdot A_1 E}{BE} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = 1$.

Ответ: 1.

Задание 2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и ребром основания 3. Найдите расстояние между прямыми SN и

МК, где точка N – середина ребра AD , точка K – середина ребра SD , точка M – середина ребра SC .

Решение:

- 1) Построим общий перпендикуляр KG по алгоритму 2.
- 2) Рассмотрим $\triangle SND$: $ND = \frac{3}{2}$, KG – средняя линия $\triangle SND \Rightarrow KG = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задание 3. В основании прямой треугольной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник с прямым углом C , стороны основания AC и BC равны 7 и 8 соответственно. $A_1 C$ перпендикулярна AB_1 .

- а) Доказать: $AA_1 \perp AC$.
- б) Найти расстояние между прямыми $A_1 C$ и AB_1 .

Решение (б):

- 1) Построим общий перпендикуляр DE по алгоритму 1.
- 2) Из $\triangle ABC$ найдем $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 64} = \sqrt{113}$.
- 3) Из $\triangle AB B_1$ найдем $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{113 + 49} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$.
- 4) Из $\triangle AC C_1$ найдем $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{49 + 49} = 7\sqrt{2}$.
- 5) Рассмотрим $\triangle AC_1 B_1$: $C_1 B_1 = 8$, $AB_1 = 9\sqrt{2}$, $AC_1 = 7\sqrt{2}$. Опустим высоту $C_1 H$, искомое расстояние $DE = \frac{1}{2} C_1 H$.
- 6) Используя метод площадей, найдем $C_1 H = \frac{AC_1 \cdot C_1 B_1}{AB_1} = \frac{56}{9}$.
- 7) $DE = \frac{1}{2} C_1 H = \frac{28}{9}$.

Ответ: $\frac{28}{9}$.

Задание 4. Трапеция $ABCD$ – основание пирамиды $SABCD$, $\angle A$ и $\angle D$ которой равны 60° и 30° соответственно. Боковые грани SAB и SCD перпендикулярны основанию.

- а) Доказать, что $(SAB) \perp (SCD)$.

- б) Найти расстояние между прямыми $SBuCD$, если высота пирамиды равна 4, а $BC=6$.

Решение (б):

- 1) Построим общий перпендикуляр EF по алгоритму 1.
- 2) В трапеции $\angle A=60^\circ \Rightarrow \angle B=120^\circ$, $\angle D=30^\circ \Rightarrow \angle C=150^\circ$.
- 3) Рассмотрим $\triangle EBC$: $\angle B=60^\circ$, $\angle C=30^\circ \Rightarrow \angle E=90^\circ$.
 $BC=6 \Rightarrow BE=3$.
- 4) Из пункта доказательства (а) $\Rightarrow SE$ – высота $\Rightarrow SE=4$.
- 5) Рассмотрим $\triangle SEB$: $SB=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.
- 6) $EF=\frac{SE \cdot EB}{SB}=\frac{4 \cdot 3}{5}=\frac{12}{5}=2,4$.

Ответ: 2,4.

Уместно организовать самостоятельную деятельность учащихся по решению предложенных заданий, чтобы они смогли оценить уровень усвоенных ими знаний, проанализировать свои ошибки, если они возникнут, и проконсультироваться в индивидуальном порядке с педагогом.

Таким образом, тщательное выполнение прописанных выше рекомендаций способствует успешному формированию умения владеть конструктивным методом определения геометрических понятий.

На первом этапе учащиеся знакомятся с целью выполнения действий, что строить общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым и находить его длину актуальное умение, так как его можно применить при решении стереометрической задачи ЕГЭ по математике профильного уровня. Для осуществления этой цели, учащиеся выполняют работу по актуализации теоретические знаний, посредством практических заданий. Знакомятся с алгоритмом построения общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

Далее, на этапе первичного применения учебного материала учащиеся самостоятельно применяют изученный алгоритм для построения общего перпендикуляра, после чего формулируют его определение. Учитель

выступает в качестве консультанта, организует индивидуальную работу при необходимости, корректирует ответы учащихся.

Третий этап – тренировочный, этап применения изученного материала в новых условиях. Во-первых, учащимся предлагаются для выполнения задания, в которых необходимо построить общий перпендикуляр в различных многогранниках. Во-вторых, вводится новое условие: построить общий перпендикуляр и найти его длину. Данный этап нацелен на многократное повторение усвоенного алгоритма, рациональный выбор действий со стороны ученика и самоанализ деятельности.

Заключительный этап подразумевает самостоятельный перенос усвоенного материала в новые условия. В качестве заданий данного этапа предложены более сложные задачи на построение и нахождение общего перпендикуляра, а также примеры экзаменационных задач.

Поэтапное формирование способствует выполнению всех критерий сформированности умения, что наглядно прослеживается.

Форма организации учебной деятельности, предложенная в ходе описания комплекта заданий, может варьироваться по желанию учителя, в зависимости от психолого-педагогической характеристики класса.

Выводы по Главе 2

Данная глава собердит два параграфа, каждый из которых посвящен разработке комплекта заданий для формирования конструктивного умения, а первом параграфе – умение осуществлять геометрические построения, во втором – владение конструктивным методом определения геометрических понятий.

Комплекты заданий разрабатывались на основании этапов формирования умения, что наглядно прослеживается в тексте работы.

На первом этапе описана цель формирования данного умения, выделена ориентировочная основа умения – умения, сформированные ранее, которые необходимы при формировании нового умения. Предложено

несколько заданий для поворения. Описаны основные алгоритмы и рекомендации по организации учебной деятельности. После прохождения первого этапа учащиеся осознают цель формирования умения и знают структуру формирования умения.

Второй этап – первичное применение. При формировании первого умения сначала учащиеся решают задания на применение алгоритма построения сечения методом следов совместно с учителем, затем самостоятельно по образцу выполняют аналогичные задания на готовых чертежах. При формировании второго умения учащиеся сразу действуют самостоятельно, применяют изученный алгоритм, создают конструкцию, на основании которой формулируют определение общего перпендикуляра. На даноом этапе выполняется второй критерий сформированности умения.

Третий этап предполагает выполнение тренировочных заданий, суть которых заключается в многократном повторении усвоенного алгоритма и решении заданий с добавлением нового условия. При формировании умения осуществлять геометрические построения на данном этапе предложены, во-первых, задания, при выполнении которых учащемуся необходимо самостоятельно построить фигуру, выбрать необходимые точки, через которые будет проходить сечение и затем построить сечение. Во-вторых, задания с добавлением нового условия: построение сечения, параллельного данной прямой. В рамках формирвоания второго умения подобраны задания на построение общего перпендикуляра в различных многогранниках и приведены несложные задачи на готовых чертежах, с новым условием: вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми. Помимо второго критерия сформирвонности умения, на данном этапе достигаются критерии: рациональность выбора действий и осуществление переноса умения в новую ситуацию.

Заключительный этап формирования умения предполагает самостоятельное применение учащимся усвоенных знаний и умений в иных

новых условиях. В первом параграфе на этом этапе предлагается, во-первых, решить задачу, при решении которой удобнее строить след секущей плоскости на плоскость верхнего основания призмы; во-вторых, решить задачу, где в условии не требуется построение сечения, но оно необходимо для решения; в-третьих, задание на применение метода следов при построении сечений невыпуклых многогранников. Во втором параграфе данный этап предполагает решение более сложных задач, в том числе экзаменационных. Самостоятельное выполнение заданий данного этапа позволит учащимся оценить уровень усвоенных ими знаний и умений, что влечет за собой выполнение последнего критерия: самоанализ результатов сформированности умения.

В разработанных комплектах, задания упорядочены по возрастанию степени сложности. Каждое задание отражает содержание изучаемой темы в рамках формирования выбранного умения. Каждый комплект заданий включает в себя: необходимый теоретический материал в краткой форме, задания для актуализации знаний и умений, задания для первичного применения учебного материала, тренировочные задания для отработки новых знаний, умений, действий и задания более сложного уровня на перенос усвоенного материала в новые измененные условия. В условии некоторых заданий лежат задачи таких типов, как задачи на доконструирование, конструирование, деконструирование. Все предлагаемые задания направлены на применение формируемого умения при решении задач. Таким образом, разработанные комплекты заданий в полной мере удовлетворяют требованиям, описанным в параграфе 1.3.

Можно также заметить, что при выполнении заданий из комплектов у учащихся формируются не только умение осуществлять геометрические построения и владение конструктивным методом определения понятий, но и происходит работа над формированием таких умений, как распознавать и изображать геометрические фигуры, выполнять выносные (плоские)

чертежи, решать задачи на нахождение геометрических величин, решать задачи на доказательство.

Разработанные комплекты заданий рекомендованы для учащихся 10 класса. Методы, средства и приемы учебной деятельности предполагаются на усмотрение учителя, в зависимости от психолого-педагогической характеристики класса.

Заключение

Соотнесение поставленных задач с результатами работы позволяет сделать следующих вывод:

1. На основании анализа психолого-педагогической и методической литературы рассмотрены подходы к определениям понятий «умения», «конструктивная деятельность», «конструирование» и «конструктивные умения». Проведен контент-анализ, сформулировано определение понятия «конструктивные умения». Первая задача работы выполнена.
2. Для выполнения второй задачи были рассмотрены классификации конструктивных умений, представленные разными авторами. Изучены виды деятельности, которые способствуют развитию конструктивных умений в курсе стереометрии. Проанализированы примерные рабочие программы по математике на базовом и углубленном уровне, с целью выделения планируемых результатов, относящихся к конструктивным умениям. За основу выбрана одна из классификаций (Кононенко Н.В.) выполнено соотнесение конструктивных умений с планируемыми результатами. На основании проделанной работы конкретизирована классификация конструктивных геометрических умений, формируемых в курсе стереометрии для достижения поставленных задач и предметных результатов.
3. Рассмотрены методы и средства формирования конструктивных умений учащихся. Выявлено, что данные умения начинают формироваться с раннего детства ребенка. Более основательное формирование конструктивных умений учащихся начинается в средней и старшей школе на уроках геометрии в рамках изучения планиметрии и стереометрии. Описаны основные принципы методики формирования конструктивных умений. Указано, что главным средством для формирования конструктивных умений выступают

практические задания и задачи. Таким образом, третья задача выполнена.

4. Для решения четвертой задачи работы были выделены виды задач, которые являются одним из компонентов формирования конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии. Проведено сопоставление видов задач с конструктивными умениями, формированию которых они способствуют. Предложены этапы решения стереометрических задач.
5. Сформулируем требования, которым должен удовлетворять комплект заданий для формирования конструктивных умений. Таким образом, задача пять выполнена.
6. Разработаны два комплекта заданий для формирования умения осуществлять геометрические построения и владеть конструктивным методом определения понятий. Содержание комплектов расписано по этапам формирования умения: формирование ориентировочной основы умения, первичное применение учебного материала, тренировочные задания, применение умения по типу все более отдаленного переноса. Также на каждом этапе можно проследить выполнение критерия сформированности умения. Комплекты заданий в полной мере соответствуют требованиям, которым должен удовлетворять комплект заданий для формирования конструктивных умений.

Таким образом, следует считать, что задачи исследования полностью выполнены, цель: разработать комплекты заданий, способствующих формированию конструктивных умений учащихся в курсе стереометрии, достигнута.

Дальнейшее направление нашей работы может заключаться в разработке комплектов заданий для формирования других выделенных конструктивных умений, формируемых в курсе стереометрии. Также можно

организовать апробацию разработанных комплектов в рамках профессиональной педагогической деятельности с учащимися 10 классов.