

Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.01 – Педагогическое образование»
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:

дата

подпись

оценка

Исполнитель:

Зими́на Анна Евге́ньевна
студент группы МиИ-1802

Научный руководитель:

Дударева Н. В.,
к. п. н., доцент кафедры ВМиМОМ

Екатеринбург 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.....	6
1.1. Понятие «Исследовательские умения» и его компоненты.....	6
1.2. Дидактические условия формирования исследовательских умений при обучении математике.....	16
1.3. Характеристика задач на построение и их место в школьном курсе геометрии.....	26
Выводы по Главе 1.....	38
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ У УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.....	40
2.1. Типы исследовательских умений, которые возможно формировать при решении задач на построение.....	40
2.2. Требования к комплекту заданий, направленному на развитие исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.....	47
2.3. Комплект заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.....	54
Выводы по Главе 2.....	62
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	64

Введение

Согласно федеральному государственному стандарту основного общего образования [24], результаты освоения программы основного общего образования должны отражать готовность обучающихся руководствоваться системой позитивных ценностных ориентаций и расширение опыта деятельности на ее основе и в процессе реализации основных направлений воспитательной деятельности, в том числе в части овладения основными навыками исследовательской деятельности. Так же предметные результаты по предметной области "Математика и информатика" должны обеспечивать умение исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность полученных результатов и умение выполнять необходимые дополнительные построения.

Вопросы формирования и развития исследовательских умений, учебной исследовательской деятельности школьников рассматривали А. К. Абдулаев, В. В. Дубинина, А. А., Жульбина, Т. Д. Запольских, О. В. Лебедева, Н. А. Семенова, М. И. Старовиков, Г. В. Токмазов, И. Ю. Чигрина, Е. Г. Шинкаренко и др.

Согласно О. В. Лебедевой [15], формирование исследовательских умений учащихся, организация исследовательского обучения в школах является одной из самых обсуждаемых проблем школы. Парадокс в том, что реальный уровень самостоятельности в учебной деятельности падает.

Развитие исследовательских умений на уроках математики изучали Д. Ганиев, В. А. Далингер, Д. А. Кириллова, Э. М. Марданов, К. Останов, Е. В. Позднякова, В. И. Седакова, Г. П. Сенников, Н. Н. Сорокина, Л. П. Стойлова, Л. В. Форкунова, и др.

По мнению В. И. Седаковой [29], в традиционных учебниках встречается недостаточно упражнений исследовательского характера. Потенциал развивающих задач, имеющих в учебниках, используется слабо. Задания исследовательского характера существенно отличаются от

традиционных заданий уже своей формулировкой. Большая часть заданий школьных учебников звучит следующим образом: «Решить уравнение», «Доказать, что выражение ... больше ...», «Упростите ...» и т. п. В формулировках исследовательских заданий нет явного ответа, его необходимо самим найти и обосновать.

Таким образом вопрос о развитии исследовательских умений с при решении задач на построение остается актуальным.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе

Предмет исследования: задачи на построение как средство формирования исследовательских умений учащихся

Цель исследования: разработать комплект заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

На основании цели исследования были поставлены (сформулированы) следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую литературу и Интернет-ресурсы с целью выявления сущности понятия «Исследовательские умения» и описания его компонентов.

2. Выделить дидактические условия формирования исследовательских умений при обучении математике.

3. Охарактеризовать задачи на построение и их место в школьном курсе геометрии.

4. Выделить типы исследовательских умений, которые возможно формировать при решении задач на построение.

5. Определить требования к комплекту заданий, направленному на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

6. На основе выделенных требований разработать комплект заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

Глава 1. Теоретические основы формирования исследовательских умений учащихся при обучении математике

1.1. Понятие «Исследовательские умения» и его компоненты

На сегодняшний день каждый день человеку приходится сталкиваться с большим потоком информации, особенно во время обучения в школе. Но при этом запомнить все накопленные человечеством за многие годы научные знания становится невозможным, даже если он изучает конкретно одну достаточно узкую область. Поэтому основной задачей обучения становится не наполнить учащихся большим количеством информации, которая только увеличивается с каждым годом, а научить находить новую или забытую информацию, используя полученный объем базовых понятий и умений.

Для эффективного и быстрого решения профессиональных и жизненных задач человеку необходимо обладать умением самостоятельно думать, анализировать информацию и отбирать наиболее существенное, а также выдвигать гипотезы и искать способы их проверки и представлять результаты работы в выводах [13].

Исследовательская работа занимает важное место в учебной деятельности. Само понятие «исследовательская работа» связано с такими понятиями, как «научное исследование», «исследование», «исследовательская деятельность» и определяется, как их совокупность.

Определение понятия «исследование» интерпретируется в современной науке как «процесс разработки новых научных знаний, один из типов познавательной деятельности», и как процесс научного изучения какого-либо объекта, для выявления его закономерностей возникновения, развития и изменения, и преобразования его в интересах общества.

Если говорить о смысле научных исследований, то это можно определить как "целенаправленное изучение, результаты которого представлены в виде системы теорий, законов и понятий". Основной целью научных исследований является получение новых знаний и пониманий, таких как классификация, систематизация и закономерности. Важным условием является то, что эти знания не были изучены другими исследователями, а также их соответствие нормам и традициям, принятым в научном сообществе.

Рассмотрим понятие научного исследования со стороны теории деятельности. В таком случае оно будет представлять собой особый вид деятельности – исследовательскую деятельность. Она, рассматривается как особый вид деятельности, направленный на получение новой информации об объекте и изучение его различных аспектов. Этот процесс требует использования разнообразных методов и подходов, которые способствуют раскрытию ранее неизвестных сторон, отношений и граней исследуемого объекта. Тем самым познавательная деятельность является важным инструментом для расширения знаний и понимания окружающего мира.

Рассмотрим разные подходы к понятиям исследовательской деятельности.

Исследовательская деятельность – это деятельность по самостоятельно выбранному алгоритму и самостоятельное планирование, свободное выполнение деятельности [1].

Е. К. Чиркунова определяет исследовательскую деятельность, как особый вид интеллектуально-творческой деятельности, который возникает благодаря функционированию механизмов поисковой активности и базируется на исследовательском поведении. Если определить поисковую активность как наличие поиска в какой-либо ситуации, а исследовательское поведение как поведение, направленное на поиск и получение новой информации, то исследовательская деятельность структурирует само

функционирование субъекта в этой ситуации. Она охватывает мотивирующие факторы исследовательского поведения и механизмы его осуществления, такие как мышление - дивергентное и конвергентное действия, решение проблем, сбор и анализ информации, синтезирование знаний и создание новых подходов к проблеме. [20].

Под дивергентным мышлением понимаем поиск множества решений для решения одной и той же задачи.

Под конвергентным мышлением понимаем решение задач с помощью четкого алгоритма действий.

Наиболее подходящее для использования в данной работе определение дал Далингер В. А. Он утверждает, что исследовательская деятельность должна рассматриваться как организованная учителем работа студентов, направленная на экспериментальный или теоретический анализ фактов, процессов и явлений, которые имеют закономерные связи и отношения, и требуют самостоятельного использования научных методов познания. Результатом этой деятельности является развитие способности выполнять учебные исследования [7].

Учебное исследование представляет собой процесс поисково-познавательной деятельности, которая связана с выявлением, установлением и изучением новых знаний и предполагает самостоятельность в выполнении задания [9].

Учебные исследования школьников можно разграничить по разным критериям, таким как цель, объект, используемый метод, время и место проведения, продолжительность, количество участников и т. д.

В научных исследованиях можно выделить две основные цели: инновационные и репродуктивные. Инновационные исследования направлены на достижение объективно новых результатов. Репродуктивные исследования, в свою очередь, являются повторением уже полученных кем-

то результатов. Второй тип часто используется в учебных исследованиях школьников.

Учебные исследования могут быть разделены на два типа по содержанию: экспериментальные и теоретические. Экспериментальные исследования предусматривают проведение собственных экспериментов и наблюдений учащимися. Теоретические же ориентированы на изучение и объединение фактов и материалов, содержащихся в различных источниках. Таким образом, это работа по анализу и синтезу информации из доступных источников.

Учебные исследования также могут быть разделены на две основные области: гуманитарную и естественно-научную. Гуманитарные исследования направлены на изучение гуманитарных наук, например истории, литературы и тд. Естественно-научные исследования затрагивают науки о природе и физике.

Исследования также можно классифицировать по продолжительности. Исследования могут быть краткосрочными (например, урок или его часть), среднесрочными (несколько дней или недель) и долговременными (месяцы или годы). Такая классификация позволяет определить время и усилия, необходимые для проведения успешного исследования. Так же исследования могут выполняться как отдельными учащимися, так и их группами. При этом необходимо учитывать то, что участники исследования могут быть из одного класса или школы, из различных школ или даже стран. На сегодняшний день это возможно благодаря применению телекоммуникационных средств, таких как социальные сети, электронная почта и др.

По предметному содержанию учебные исследования школьников могут быть разделены на три типа: монопредметные, межпредметные и надпредметные. Монопредметные исследования ограничиваются изучением одного учебного предмета, в то время как межпредметные требуют использования знаний из нескольких предметных областей для решения

проблемы. Надпредметные исследования выходят за рамки учебного плана и объединяют знания из различных предметов [1].

Одним из важных компонентов исследовательской деятельности являются исследовательские умения.

Понятие «исследовательские умения» разными авторами характеризуется по-разному. Некоторые исследователи дают определение самому понятию, а другие сразу предлагают классификацию исследовательских умений.

Проведя анализ определений и классификаций разных авторов, можно выделить достаточно много различных понятий «исследовательских умений».

Рассмотрим некоторые из них.

Савенков А. И. предлагает определить исследовательские умения, как интеллектуальные и практические умения, которые необходимо развивать для осуществления учащимся самостоятельного исследования [28].

По мнению П. В. Середенко, исследовательские умения и навыки – это реализация способности учащихся выполнять ряд операций для осуществления интеллектуальной и практической деятельности, которая представляет собой исследовательскую деятельность и приводит к получению новых, ранее неизвестных, знаний.

В отличие от Середенко, О. В. Лебедева считает, что, исследовательские умения – это результат и мера исследовательской деятельности учащихся, способность проводить самостоятельные наблюдения, эксперименты, приобретенная во время решения различных исследовательских задач; способность учащихся выполнять действия, которые необходимы для осуществления исследовательской деятельности. [15].

По мнению Н. В. Сычковой, [32] исследовательские умения следует понимать как приобретенную человеком на основе методологии, методики и

техники способность выполнять различные виды научно-педагогической деятельности.

Т. А. Плотникова дает следующее понятие исследовательских умений.

Исследовательские умения – это такие умения, благодаря которым, учащиеся самостоятельно выполняют работы с элементами исследования, они проводят поисковый эксперимент, предлагают гипотезы и обосновывают методы проверки справедливости выдвинутых ими гипотез [22].

Мамедова Н. В. под исследовательскими умениями предлагает понимать «способ выполнения действий исследовательского характера (умение видеть проблемы, выработать гипотезы, наблюдать, проводить эксперименты, давать определения понятиям и др.) на основе приобретенных научных знаний и практической деятельности» [16].

Для наглядности составим и рассмотрим контент-анализ приведенных определений (Таблица 1). Можно заметить, что каждый автор определяет исследовательские умения по-своему. Они считают, что они являются умениями, способностями, результатом или способом для осуществления исследовательских действий, решения исследовательских задач или выполнения исследования.

Таблица 1.

Контент-анализ определений понятия исследовательские умения

Ключевое слово	Умения	Результат	Способность	Способ	Самостоятельное	Исследование	Практическая	Получение знаний	Наблюдение	Эксперимент	Деятельность	Методы	Гипотезы	Выполнять ряд операций	Планирование
Автор															
Савенков А. И.	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
П. В. Середенко	-	-	+	-	-	+	+	+	-	-	+	-	-	+	-
О. В. Лебедева	-	+	+	-	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-

Н. В. Сычковой	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+
Т. А. Плотникова	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	-	+	+	-	-
Мамедова Н. В.	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	-	+	-	+

Различные исследователи выделили умения, которые необходимы для открытия и осуществления эффективного поиска решения проблемы, и назвали их общими исследовательскими умениями.

Так, например, А. И. Савенков [29] дает следующее определение общим исследовательским умениям. Он интерпретирует их как навыки обнаружения проблем, постановки вопросов, предложения возможных гипотез, определения терминов, создания классификаций, наблюдения, проведения экспериментов, анализа данных, структурирования материала, работы с текстами, а также защиты своих идей.

К общим исследовательским умениям относят следующие:

- видеть и формулировать проблему, ставить цель работы; анализировать условия конкретно заданной ситуации;
- выдвигать и обосновывать гипотезы; планировать решение проблемы; выполнять анализ результата;
- оценивать свою деятельность [21].

Говоря о исследовательских умениях, можно заметить, что авторы выделяют различные их виды. В чем-то они совпадают, а в чем-то расходятся. Для большей наглядности рассмотрим некоторые из них.

К. П. Кортнева и Н. Н. Шушариной [14] предлагают, развивать следующие исследовательские умения:

- умение затрагивать всю проблему целиком;
- умение правильно ставить исследовательские цели и задачи;
- умение оценивать применение различных методов решения поставленной экспериментальной задачи;
- умение планировать и проводить эксперимент;

— умение искать наилучшее решение поставленной экспериментальной задачи;

— умение реализовывать экспериментальную методику;

— умение ставить оценку информативности экспериментальной методики и ее точность благодаря лабораторно-практическим занятиям.

К числу исследовательских умений Н. В. Сычкова [32] относит:

— умения и навыки работы с научной литературой;

— умение наблюдать и анализировать педагогические явления;

— формулировать гипотезу;

— ставить и проводить эксперимент;

— обрабатывать и обобщать его результаты;

— обобщать материалы в виде доклада;

— изучать педагогический опыт.

А. И. Савенков [27] предложил следующие исследовательские умения:

— видеть проблемы;

— ставить вопросы;

— выдвигать гипотезы;

— давать определение понятиям;

— классифицировать;

— наблюдать;

— проводить эксперименты;

— делать выводы и умозаключения;

— структурировать материал;

— объяснять, доказывать и защищать свои идеи.

Далингер В. А. [8] считает, что в настоящее время учебные исследования преимущественно используются для достижения развивающих целей обучения, поскольку они являются мощным инструментом формирования мышления. Для аргументирования своей позиции он использует следующие утверждения:

- обладают большими потенциальными возможностями для развития умственных операций;
- формируют активность и целенаправленность мышления;
- развивают гибкость мышления;
- формируют культуру логических рассуждений.

В свою очередь Кириллова Д. А. и Белова О. Н. [13], говоря о необходимости формирования исследовательских умений, используют следующие обоснования:

- исследовательские умения дают возможность осуществления использования освоенных методов при изучении не только учебных дисциплин, но и других предметных областей, связанных с личными внеучебными интересами школьников;
- исследовательские умения содействуют появлению интереса к изучению современной науки, что приводит к активной разработке собственных исследовательских проектов;
- исследовательские умения повышают уровень инициативности обучающихся, учит их самостоятельно принимать решения в новых, не только учебных, но и жизненных ситуациях, которые требуют проявления творчества и гибкости мышления учеников.

В дополнение к вышесказанному, Середенко П. В. говорит, что необходимость развития исследовательских умений обусловлена информационной гибкостью современного мира, что заставляет систему образования активно использовать исследовательские методы обучения. Кроме того, это связано с внутренними задачами организации педагогического процесса, такими как контрольные и тестовые задания, которые требуют осознанного применения исследовательских умений и наличия соответствующих навыков [31].

Таким образом, в данной работе под исследовательскими умениями будем понимать приобретенную способность учащихся проводить

наблюдения, эксперименты, выдвигать гипотезы и пр. для самостоятельного осуществления исследовательской, практической и интеллектуальной деятельности.

Исследовательские умения являются интеллектуальными и практическими умениями, которые необходимы для реализации и возможности выполнять ряд операций для осуществления интеллектуальной и эмпирической деятельности, которая приводит к получению новых знаний. Существуют различные классификации исследовательских умений, а также некоторые авторы выделяют среди них «общие исследовательские умения». Перечисленные утверждения авторов о необходимости и возможности развития исследовательских умений абсолютно разными методами, говорят о целесообразности их формирования при решении задач на построение.

1.2. Дидактические условия формирования исследовательских умений при обучении математике

Из всего множества дисциплин, которые изучаются в основной школе, именно математика не может обойтись без исследовательской деятельности обучающихся. Каждый школьник, приступая к решению задания, как минимум, должен проанализировать его содержание, чтобы понять условия и требования, затем выбрать необходимый способ решения, реализовать его, получить ответ и при необходимости выполнить проверку. Если выбранный способ решения окажется неверный - найти другой. Проанализировать полученный ответ, сопоставив его с условием задания [13].

При организации исследовательской деятельности в процессе обучения математики каждый урок должен быть направлен на то, чтобы развить интерес школьников к предмету, мотивировать его к решению задач. Организация работы на занятиях должна несколько отличаться от работы на обычном уроке: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, и, тем самым, самостоятельно добиваться результата.

Сформирование учебно-исследовательской деятельности учащихся является важной задачей для образовательной системы. В своей работе, Далингер В.А. [8] рассматривает факторы, способствующие достижению данной цели.

В качестве первого фактора он выделяет личностно ориентированный подход к обучению. Это означает, что образовательная система должна учитывать индивидуальные особенности каждого учащегося, его способности, уровень подготовки и личные качества.

Другим важным фактором является ориентация на продуктивное достижение результата. Это означает, что учащиеся должны стремиться не только узнать новую информацию, но и применить ее на практике, превращая знания в реальные результаты. Таким образом произойдет наибольшее усвоение полученных знаний.

Проблемное обучение считается инструментом развития творческой деятельности учащихся. Этот подход предполагает, что ученики должны столкнуться с реальными проблемами и самостоятельно искать способы их решения.

Оптимальное сочетание логических и эвристических методов решения задач также важно для формирования учебно-исследовательской деятельности. Это означает, что ученики должны уметь использовать как логический, так и творческий подходы к решению задач.

Креативная организация учебного процесса и создание творческих ситуаций также важны в достижении данной цели. Ученики получают возможность проявлять свои творческие способности и мышление.

Ситуации совместной поисковой деятельности и детализация учебного процесса также способствуют формированию учебно-исследовательской деятельности учащихся. Учащиеся должны иметь возможность работать вместе и искать решения задач вместе, а также иметь четкое представление о том, что им необходимо изучить.

Создание психологической атмосферы и оптимальных условий для творческой деятельности также необходимо для достижения данной цели. В обучении должны создаваться условия для творчества и экспериментирования, чтобы учащиеся могли проявить свой потенциал.

Для успешного проведения и активизации поисково-исследовательской деятельности учащихся, были выделены следующие факторы:

- доброжелательная атмосфера между учащимися и педагогом;
- сочетание индивидуальных и коллективных форм обучения, возможность работы самостоятельно и в небольших группах;
- структурирование учебного материала по принципу нарастания познавательной трудности учебной работы, после успешного выполнения задания переход к более сложным;

- вооружение учащихся рациональными приемами познавательной деятельности, формирование навыка нахождения наиболее быстрого и легкого решения;
- формирование внутренних стимулов к учению, самообразованию и др.

В своих исследованиях о торможении активности учащихся в процессе познавательной деятельности В. А. Далингер выделяет ряд факторов, включающих в себя: репродуктивные вопросы учителя и ответы учеников, отсутствие изучения нового материала в большинстве уроков, исключительно стандартный подход к закреплению и применению знаний.

При успешной организации учебного процесса, который будет обеспечивать развитие поисково-исследовательской деятельности учащихся, относят следующие принципы работы педагога:

- педагогическое руководство в создании мотивов и стимулов к учению;
- привитие интереса и любопытства учащихся к изучаемому объекту;
- вооружение учащихся необходимыми приемами познавательно-поисковой деятельности, которые они будут способны применить;
- систематическое осуществление принципа индивидуализации в обучении, что повысит умение самостоятельной работы;
- широкое использование технических и наглядных средств обучения, применение интерактивных заданий;
- внедрение в практику работы и систематическое использование компьютерных технологий, использование их на уроках;
- разработка творческих заданий, требующих нестандартных решений и самостоятельного поиска источников информации;

– сочетание и соединение дидактически и методически обоснованных методов, способствующих развитию познавательной деятельности и творческих способностей учащихся.

Чтобы приобщать обучающихся к исследовательской деятельности, педагогу можно предлагать им решить специальные исследовательские задачи, которые помогут повысить мотивацию и интерес [8].

Под исследовательскими задачами будем понимать «задачи, процесс решения которых способствует формированию у учащихся исследовательских умений и основными чертами которых являются: постановка вопроса, при котором ответ неочевиден; широта условия, допускающая несколько вариантов его трактовки или соответствующая нескольким конфигурациям; скрытость связей условия с известными учащимся теоремами и формулами» [33].

Исходя из определения, можно утверждать, что при решении исследовательских задач у учащихся будут формироваться исследовательские умения, благодаря которым они смогут в дальнейшем заниматься активной исследовательской деятельностью.

Кроме решения исследовательских задач, привлекать обучающихся к исследовательской деятельности возможно через дополнительную работу над задачей на уроках математики.

Дополнительная работа по решению задач включает в себя анализ уже решенных задач, обучение различным методам решения, исследование содержания задач, а также развитие навыков обоснования правильности решения.

Некоторые педагоги могут упускать и не проводить дополнительные работы над задачами, потому что это отнимает время и возможность решить наибольшее количество задач, но такая работа является важной в процессе обучения, потому что способствует формированию смысла арифметических

действий, развитию навыков поиска альтернативных решений и повышению интереса учащихся к процессу обучения.

С. Е. Царева [34] назвала следующие виды дополнительной работы с решенной задачей, которые возможно применять на уроках математики в основной школе:

1. Изменение условия задачи с целью решения ее другим действием.
2. Постановка нового вопроса к уже решенной задаче и выявление всех вопросов, на которые еще можно найти ответы при данном условии.
3. Сравнение содержания и решения данной задачи с другой задачей.
4. Решение задачи иным способом или с помощью других методов, таких как графический, алгебраический и т.д.
5. Изменение числовых данных задачи, чтобы обнаружить новый способ решения или сделать один из методов решения невозможным.
6. Исследование способов решения задачи, условий ее решения и целесообразных приемов для ее решения. (Сколько способов решения имеет задача? При каких условиях она не имела бы решения? Какие приемы наиболее целесообразны для поиска решения этой задачи? Возможны ли другие методы решения?)
7. Обоснование правильности решения (проверка решения задачи любым из известных приемов).

Кроме дополнительных работ над задачей на уроках математики целесообразно организовывать поисково-исследовательскую деятельность учащихся, которая заключается в следующем:

- а) выявлении существенных свойств понятий или отношений между ними;
- б) установление связей между понятиями;
- в) ознакомление с фактами, отраженными в формулировке и доказательстве теоремы;
- г) обобщении теоремы;

- д) составлении обратной теоремы и проверке ее истинности;
- е) выделении частных случаев некоторого факта в математике;
- ж) обобщении различных вопросов;
- з) классификации математических объектов, отношений между ними, основных фактов данного раздела математики;
- и) решении задач различными способами;
- к) составлении новых задач, вытекающих из решения данных;
- л) построении контрпримеров и т. д [8].

Поисково-исследовательскую деятельность возможно выполнять как во время решения задач, так и во время выполнения дополнительных заданий к этим задачам.

Как считает С. Н. Дорофеев [33], за время обучения в школе учащиеся проходят через три этапа формирования исследовательских умений и опыта исследовательской деятельности школьников.

В образовательном процессе начальной и основной школы осуществляется пропедевтический этап, занимающий от 1 до 6 класса. Важно начинать формировать исследовательские умения еще в начальной школе, потому что так происходит знакомство учащихся с учебной исследовательской деятельностью, формирование положительного отношения к ней и создание благоприятных условий для развития интереса к исследовательской деятельности. Для достижения данной цели учащиеся выполняют различные исследовательские задания при полном или частичном контроле руководителя. Также на данном этапе формируются начальные представления о значимости исследовательской деятельности и осуществляется формирование отдельных действий, составляющих исследовательские умения.

Формирующий этап реализуется в процессе обучения математике учащихся 7-9 классов. Главной задачей данного этапа является формирование действий, составляющих исследовательские умения, такие как

базовые, специальные и общие, а также приобретение опыта, необходимого для успешного выполнения учебных исследований. В процессе обучения на данном этапе осуществляется контроль обученности учащихся, позволяющий проследить за их успеваемостью и корректировать образовательный процесс в соответствии с потребностями учеников.

В старшей школе реализуется обобщающий этап, целью которого является формирование исследовательского опыта учащихся. Для этого они должны участвовать в научных школьных объединениях, конференциях разного уровня и т.д. На этом этапе ученики осознают и переносят свои умения на новые условия, развивают исследовательские компетенции и обогащают опыт выполнения учебных исследований.

Однако, основной период формирования исследовательских умений и опыта приходится на 5-9 классы. На этом уровне ученики должны сформировать базовые и специальные исследовательские умения. Исследовательские задачи и задания являются основным средством их формирования. При выполнении таких заданий полезно использовать эвристические беседы, элементы проблемного обучения, метод проектов и т.д. Процесс решения задач способствует приобретению исследовательского опыта учащимися.

Грань, Т. Н. [4] считает, что целесообразно разделить исследовательскую деятельность на два этапа: практический и теоретический.

Первый этап основан на работе с конкретными математическими объектами. Обучающимся предлагается найти закономерности каких-либо объектов, научиться их классифицировать по различным принципам и исследовать новые свойства этих объектов.

Математические объекты могут включать в себя уравнения, неравенства, тождества, функции и их графики, геометрические фигуры или текстовые задачи, описывающие явления в окружающем мире.

Работа с конкретными объектами дает возможность учащимся выполнять измерения, сравнивать, преобразовывать объекты с помощью наложения, разрезания, сложения, и изменения значений некоторых величин.

Проведение экспериментов с математическими объектами позволит обучающимся изучить их с другой стороны

На теоретическом этапе обучающиеся вовлекаются в проведение «виртуального» эксперимента, используя логические рассуждения, основанные на изученных ранее теоретических утверждениях курса математики.

Важным условием успешного формирования исследовательских умений у обучающихся является использование дифференцированного подхода на всех этапах организации исследовательской деятельности.

Существуют показатели сформированности исследовательской компетентности учащихся на уроках математики. Десницкая, В. В. [10] предлагает разделить их на уровни.

Репродуктивный уровень:

1. Положительные мотивы выражены слабо.
2. Знания о процессе исследования сформированы слабо.
3. Поиск информации вызывает затруднения.
4. Безразличное отношение к исследовательской деятельности.
5. Незаинтересованное отношение к исследовательским задачам, неуверенность в работе, необходимость выполнения заданий под чьим-либо руководством, потребность в прекращении работы.
6. Система личностно-осмысленных знаний, умений, навыков, ценностных отношений сформирована слабо.

Продуктивный уровень:

1. Средняя степень выраженности мотивов.
2. Удовлетворительная степень сформированности знаний.

3. Удовлетворительная степень сформированности исследовательских умений.

4. Учащиеся способны выдвигать гипотезы.

5. Противоречивое отношение к исследовательской деятельности.

6. Средняя степень, сомнения в правильности или рациональности конкретных операций.

7. Средняя степень сформированности системы личностно-осмысленных знаний, умений, навыков, ценностных отношений.

Творческо-поисковый уровень:

1. Положительные мотивы учащихся выражены достаточно хорошо.

2. Высокая степень сформированности знаний как когнитивной основы исследовательской компетентности.

3. Исследовательские умения как опыт использования знаний сформированы хорошо, творческий уровень проведения исследований.

4. Учащиеся способны выполнять анализ, оформлять исследования и защищать его.

5. Положительное, увлеченное отношение к учебным исследованиям (отношение к процессу, содержанию и результату компетентности).

6. Положительное отношение к проблемной ситуации, уверенность в работе, настойчивость поиска решения, потребность в продолжении работы, стремление к самостоятельной исследовательской деятельности.

7. Высокая степень сформированности системы личностно-осмысленных знаний, умений, навыков, ценностных отношений [10].

В современном образовании достаточно активно стали применяться разные методы и приемы обучения, включая исследовательский метод, в особенности на уроках математики. Применение данного метода позволяет повышать вероятность достижения основных межпредметных результатов обучения и создает возможности для формирования важных исследовательских умений. Именно знания, полученные путем

самостоятельного исследования, являются более надежными и прочными, чем те, которые даются в готовом виде.

Процесс формирования исследовательских умений является сложным, поскольку у каждого человека имеются различные способности, а также разный уровень сформированности этих умений. Именно поэтому необходимо учитывать возможности каждого обучающегося. Организация исследовательской деятельности в два этапа может значительно улучшить качество формирования исследовательских умений на уроках математики. Это в свою очередь позволит не только обеспечить всестороннее развитие личности, но и стимулировать ее стремление к самосовершенствованию и саморазвитию.

Таким образом, выделенные факторы, условия и принципы организации учебного процесса способствуют формированию исследовательской деятельности. Исследовательская деятельность формируется в три этапа, а именно: пропедевтический, формирующий и обобщающий. Во время формирующего этапа, который приходится на 7-9 классы, учащиеся знакомятся с основными построениями циркулем и линейкой, затем решают задачи на построение.

1.3. Характеристика задач на построение и их место в школьном курсе геометрии.

Самостоятельные исследовательские работы школьников и нестандартные математические задачи являются наиболее эффективными методами развития исследовательских умений у учащихся. Одними из таких задач являются задачи на построение. Они являются особенно важными, потому что способствуют развитию сообразительности, изобретательности, смекалки и других важных качеств [29].

Разные авторы интерпретируют задачи на построение по-разному.

Шебанова, Л. П. дает следующее определение.

Задача на построение – это требование из заданных элементов в соответствии с какими-то условиями, с помощью определенных инструментов построить названную геометрическую фигуру или их совокупность, удовлетворяющих указанным свойствам:

- заданные элементы в задачах на построение могут быть даны в натуральном виде, а могут быть лишь названы с указанием каких-либо их характеристик;

- во всякой задаче на построение требование состоит не просто в построении какой-то геометрической фигуры, а в построении геометрической фигуры, обладающей указанными в задаче свойствами;

- обычно указывается тот инструмент, с помощью которого следует выполнить построение [36].

Мугаллимова, С. Р. считает, что задача на построение – это задача, в которой требуется построить геометрический объект с заранее заданными свойствами, пользуясь только указанными инструментами. Построения в таких задачах требуется выполнять исключительно циркулем и линейкой, при этом количество элементарных построений должно быть конечно. [19].

Блинков А. Д., Блинков Ю. А. определяют задачу на построение, как задачу, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь

только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений) [2].

В данной работе будем использовать определение, которое дал В. А. Далингер [6]. Он считает, задача на построение заключается в создании определенной фигуры с использованием заранее заданного набора инструментов. Для успешного выполнения задачи необходимо учитывать соотношения между элементами фигуры, а также информацию о других фигурах, связанных с искомой фигурой. Решение задачи на построение может представлять собой любую фигуру, удовлетворяющую поставленным условиям.

Для того чтобы найти решение задачи на построение, необходимо свести ее к определенному набору простейших построений, которые необходимо выполнить исключительно с помощью циркуля и линейки. После выполнения базовых построений искомая фигура считается построенной. Также возможно нахождение всех решений задачи или доказательство того, что решений не существует.

Г.П. Сенников [30] предложил свести решение задачи на построение к 5 базовым элементарным построениям, которые считаются выполнимыми с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим эти построения подробнее.

1. Построение прямой линии через две известные точки.
2. Построение точки пересечения двух известных прямых (при условии, что эта точка существует).
3. Построение окружности известного радиуса с центром в известной точке.
4. Построение точек пересечения известной прямой и известной окружности (при условии, что эти точки существуют).
5. Построение точек пересечения двух известных окружностей (если такие точки существуют).

Решение задачи на построение, как предлагают многие авторы, такие как Горшкова Л. С., Марина Е. В., Шебанова, Л. П., Далингер В. А. К. Ш. Рамазанова, Н. В. Тимербаева., Жигалов А.В., Коровина В.Г. и др., обычно осуществляется в четыре этапа.

1. Анализ.

Целью проведения анализа является составление плана решения задачи. Во время анализа предполагается, что задача решена сначала создается рисунок который изображает данные фигуры и искомую фигуру в соответствии с условиями задачи этот рисунок помогает понять какое основное объектное решение необходимо построить затем используя известные геометрические факты устанавливается связь между данными фигурами и искомой фигурой что позволяет определить план построения искомой фигуры

2. Построение.

На этом этапе реализуется план решения задачи. Для этого выполняют построения циркулем и линейкой и записывают последовательно, какие построения выполнены.

3. Доказательство.

Здесь доказывают, что построенная фигура принадлежит требуемому семейству и удовлетворяет условиям, связывающим данные фигуры с искомой.

4. Исследование.

В исследовании надо дать ответ на два вопроса: 1) При всяком ли выборе данных задача имеет решение, т. е. искомую фигуру можно построить циркулем и линейкой; 2) Сколько различных решений имеет задача при каждом возможном выборе данных?

Для решения задач на построение К. Ш. Рамазанова, Н. В. Тимербаева [18] в своих работах выделяют три основных метода.

1. Метод геометрических мест точек (ГМТ) или метод пересечений.

Метод заключается в том, что если некоторая, необходимая точка удовлетворяет двум условиям, то строится ГМТ, которые будут удовлетворять каждому из этих условий, и тогда необходимая точка принадлежит их пересечению.

Чтобы учащиеся были способны воспользоваться данным методом, им необходимо знать основные геометрические места точек на плоскости:

- геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках;
- геометрическим местом точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки, является окружность с центром в данной точке и радиусом, равном данному отрезку;
- геометрическим местом точек, удаленных на расстояние d от данной прямой в выбранной полуплоскости, является прямая, параллельная данной и находящаяся на расстоянии d от нее;
- геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых, является прямая, находящаяся на одинаковом расстоянии от данных прямых (ось симметрии этих прямых);
- геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектриса этого угла;
- геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, является дуга окружности, опирающейся на этот отрезок.

Исходя из этого, можно заметить, что одна и та же фигура может являться ГМТ разных объектов. Это говорит о том, что чем больше свойств искомой фигуры будет известно, тем решение будет наиболее успешным.

2. Метод геометрических преобразований.

Метод преобразований заключается в том, что при выполнении анализа данных и искомых фигур может быть полезно рассмотреть фигуру, которая может быть получена из данной или искомой с помощью определенного

преобразования. Таким преобразованием может являться поворот, параллельный перенос, симметрия, гомотетия и пр. Созданные с помощью преобразований новые фигуры могут привести к построению искомой фигуры. Бывают случаи, когда решение задачи сводится к построению точки, которая является общей для данной фигуры и фигуры, полученной из другой данной с помощью преобразования.

В зависимости от того, какое именно преобразование рассмотрели, можно говорить о методе переноса, методе поворота, гомотетии, инверсии и т. д.

3. Алгебраический метод.

Алгебраический метод решения задачи на построение заключается в том, что построение искомой фигуры F сводится к построению некоторого отрезка. Исходя из условия задачи, выражают длину x этого отрезка через длины a , b , c ... данных отрезков и получают формулу. По найденной формуле строится отрезок длины x , а затем и искомая фигура F .

Горшкова Л. С., Марина Е. В. [3] в своей работе рассматривают те же методы, что и К. Ш. Рамазанова и Н. В. Тимербаева, но при этом вместо одного метода геометрических преобразований рассматривают его составляющие (метод переноса, метод поворота, гомотетия, инверсия и т. д.), как отдельные методы.

Блинков А. Д., Блинков Ю. А. [2] дополняют список К. Ш. Рамазанова, Н. В. Тимербаевой следующими методами.

4. Метод вспомогательного треугольника.

Метод вспомогательного треугольника целесообразно применять в задачах на построение треугольников по их различным элементам, как основным, так и вспомогательным. Этими элементами могут выступать стороны, углы, медианы, высоты и т.д.

Суть данного метода - свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника.

Этот метод является менее актуальным и востребованным, так как его возможно применять только в задачах, связанных с построением треугольника, а задачи на построение могут быть связаны с самыми различными геометрическими фигурами.

Помимо классических методов решения задач на построение Мугаллимова, С. Р. [19] рассказывает о следующем методе.

5. Метод оригаметрии.

Метод заключается в построениях с помощью перегибания бумажного листа. Элементарные операции в таких задачах – построение прямой, проходящей через две заданные точки, перегибания листа (совмещение прямых с помощью осевой симметрии), построение точек пересечения прямых.

Благодаря этому методу учащиеся могут проявлять свои творческие идеи, он способствует увлечению данной темой, развивает фантазию. Но, малофункционален, что делает невозможным применение его при решении любых задач.

Таким образом можно утверждать, что существует достаточное количество различных методов решения задач на построение. При изучении их у учащихся появится возможность выбирать какой-либо метод для наиболее быстрого и эффективного решения задач.

Раздел геометрии, в котором рассматриваются задачи на построение фигур и методы решения таких задач, называют конструктивной геометрией.

Рассмотрим на евклидовой плоскости основные объекты этой плоскости: точки, лучи, окружности, и назовем их основными фигурами. Пусть на их множестве задано отношение, обозначенное словом «построен».

Это отношение является основным неопределяемым понятием конструктивной геометрии.

Свойства этого понятия выражены в аксиомах конструктивной геометрии, которые разделены на две группы: общие аксиомы и инструментальные (аксиомы циркуля и линейки).

Общие аксиомы будем обозначать АО. Перейдём к их формулировке.

АО₁. Каждая из данных фигур $F_1, F_2 \dots F_k$ построена.

АО₂. Если построены фигуры F_1, F_2 , то построена и фигура $F = F_1 \cup F_2$, т.е. фигура, являющаяся их объединением.

АО₃. Если фигуры F_1, F_2 , построены и их пересечение $F = F_1 \cap F_2$ не пусто, то фигура $F_1 \cap F_2$ построена. Вопрос о том, является ли пересечение фигур F_1, F_2 пустым множеством или нет, решается в каждом случае с помощью соответствующих предложений математики.

АО₄. Если фигуры F_1, F_2 , построены и их разность $F = F_1 \setminus F_2$ не является пустым множеством, то фигура $F_1 \setminus F_2$ построена.

АО₅. Если фигура F построена, то можно построить точку, принадлежащую этой фигуре.

АО₆. Если фигура F построена, то можно построить точку, не принадлежащую этой фигуре F .

Рассмотрим инструментальные аксиомы (аксиомы циркуля и линейки).

A_1 , аксиома линейки. Если построены точки A и B , $A \neq B$, то можно построить луч $[A, B)$.

Следствие. Если точки A и B , $A \neq B$ построены, то можно построить прямую (AB) (аксиомы A_1, AO_2 , $(AB) = [AB) \cup \dot{}$ и отрезок $[AB]$ (аксиомы A_1, AO_3 , $[AB] = [AB) \cap \dot{}$).

A_2 , аксиома циркуля. Если построены точка O и отрезок $[AB]$, то можно построить окружность (O, r) с центром O и радиусом $r = AB$.

Система аксиом $\{AO_1, \dots, AO_6\} \cup \{A_1, A_2\}$ и есть система аксиом построения с помощью циркуля и линейки.

Указанная система аксиом дает возможность выполнять следующие построения.

ПП₁. Построить луч $[AB)$, если точки A и B построены.

ПП₂. Построить отрезок $[AB]$, если точки A и B построены.

ПП₃. Построить прямую (AB) , если точки A и B построены.

ПП₄. Построить окружность, если построены ее центр и отрезок, равный радиусу этой окружности.

ПП₅. Построить точку пересечения двух построенных непараллельных прямых.

ПП₆. Построить точки пересечения построенных прямой и окружности, если такие точки существуют. (В частности, отложить отрезок, равный данному.)

ПП₇. Построить точки пересечения двух построенных окружностей, если такие точки существуют.

ПП₈. Построить точку, принадлежащую построенной фигуре.

ПП₉. Построить точку, не принадлежащую построенной фигуре (если эта фигура не совпадает с плоскостью, на которой выполняется построение) [3].

В школьном курсе геометрии в соответствии с примерной рабочей программой по математике на базовом уровне [25] учащиеся изучают задачи на построение. А именно, в 7 классе школьники изучают простейшие построения с помощью циркуля и линейки при изучении темы «Простейшие геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин», на которую выделяется 14 часов. Во время прохождения темы «Окружность и круг. Геометрические построения» (14 часов), ученики решают основные задачи на построение: угла, равного данному; серединного перпендикуляра данного отрезка; прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой; биссектрисы данного угла; треугольников по различным элементам.

При изучении темы «Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках, подобные треугольники» (15 часов) в 8 классе, учащиеся проводят построения с помощью циркуля и линейки с использованием теоремы Фалеса и теоремы о пропорциональных отрезках, строят четвёртый пропорциональный отрезок.

На углубленном уровне [26], при изучении темы «Начала геометрии. Простейшие геометрические фигуры и их свойства. Измерение геометрических величин» (28 часов) в 7 классе, учащиеся учатся проводить простейшие построения и измерения с помощью инструментов. Во время прохождения темы «Окружность. Геометрические места точек. Построения с помощью циркуля и линейки» (18 часов), учащиеся формулируют этапы задач на построение (построение, доказательство, исследование), проводят задачи на построение, осуществляют основные построения циркулем и линейкой, знакомятся с историей развития геометрии, классическими задачами о построении.

В 8 классе, во время изучения темы «Четырёхугольники» (22 часа), учащиеся проводят деление отрезка на равные части с помощью циркуля и линейки.

Различные учебники включают в себя различные методы и способы обучения задачам на построение, включают в себя разные задачи и методы их решения, а также могут развивать разные исследовательские умения при их решении. Рассмотрим и сравним некоторые из них (Таблица 2).

Таблица 2

Сравнение учебников при изучении задач на построение

Критерий сравнения	Л. С. Атанасян	А. В. Погорелов	С. А. Козлова, А. Г. Рубин, В. А. Гусев	А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир
Определение задач на построение	-	+	-	+
Этапы	+	-	+	-

Критерий сравнения	Л. С. Атанасян	А. В. Погорелов	С. А. Козлова, А. Г. Рубин, В. А. Гусев	А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир
решения				
Методы решения	метод подобия	метод геометрического места точек, геометрических мест	метод геометрического места точек, метод центральной симметрии	метод геометрического места точек
В каких темах встречаются	«Задачи на построение»; «Параллельные прямые»; «Построение треугольника по трем элементам»; «Практические приложения подобия треугольников», «построение правильных многоугольников»	«Геометрические построения»; «Построение некоторых правильных многоугольников»; «Теорема Фалеса»	«Задачи на построение»; «Перпендикулярные прямые»; «Геометрические места точек»; «Параллельность прямых и центральная симметрия»; «Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника»	«Окружность и круг. Геометрические построения»; «Метод геометрических мест точек в задачах на построение»; «Правильные многоугольники и их свойства»
Основные построения	построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; построение перпендикулярных прямых; построение середины отрезка; построение параллельных прямых; построение треугольника по трем элементам. Построить треугольник по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла; построить правильный	построение треугольника с заданными сторонами; построение угла, равного данному; построение биссектрисы угла; деление отрезка пополам; построение перпендикулярной прямой. Построить правильный шестиугольник, треугольник; по заданному вписанному n -угольнику построить правильный вписанный n -	построить отрезок, равный данному отрезку и отложенный на данной прямой от данной на ней точки; построить треугольник по трем сторонам; построить угол, равный данному, одна из сторон которого совпадает с данным лучом; построить биссектрису данного угла. Построить перпендикулярные прямые; построить серединный перпендикуляр, построить точку	построить угол, равный данному, одна из сторон которого является данным лучом; построить серединный перпендикуляр данного отрезка; разделить данный отрезок пополам; даны прямая и не принадлежащая ей точка, через эту точку провести перпендикулярную данной; даны прямая и принадлежащая ей точка, через эту точку провести

Критерий сравнения	Л. С. Атанасян	А. В. Погорелов	С. А. Козлова, А. Г. Рубин, В. А. Гусев	А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир
	шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку; дан правильный n -угольник, построить правильный $2n$ -угольник	данный отрезок АВ на n равных частей	Х, удовлетворяющую двум условиям; через точку, не принадлежащую данной прямой провести прямую, параллельную данной прямой; разделить данный отрезок, на n равных отрезков	прямую, перпендикулярную данной; постройте биссектрису данного угла; постройте треугольник по трем данным его сторонам; Построение правильного шестиугольника; построение правильного $2n$ -угольника по заданному n -угольнику
Примеры задач	На стороне ВС треугольника ABC постройте точку, равноудаленную от вершин А и С. С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на 4 равные части. С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите правильный шестиугольник.	Дан треугольник, постройте его высоты. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.	С помощью циркуля и линейки разделите угол величиной 135° на 3 равные части. Пользуясь одной лишь линейкой, постройте треугольник, все стороны которого имеют разную длину. Даны точки А и В, постройте серединный перпендикуляр к АВ	Начертите произвольный угол, разделите его на 4 равные части. Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащем острому углу. На плоскости отметили точки А и В. С помощью одного лишь циркуля постройте точку С такую, чтобы точка В являлась серединой отрезка АС.

Как показал анализ учебников, не все авторы считают необходимым вводить определение задач на построение и описывать этапы их решения. Разные авторы предлагают различные методы для решения таких задач, самым распространенным стал метод геометрических мест точек. Описание этого метода при решении задач на построение некоторые авторы вынесли в

отдельный параграф. На уроках ученикам предлагается достаточное количество основных построений. Так же важно заметить, что авторы учебников, описывающие этапы решения задач на построение, предлагают одни и те же этапы, а именно: анализ, построение, доказательство, исследование.

Стоит заметить, что авторы учебников, к сожалению, не предлагают учащимся достаточное количество методов решения задач. Таким образом они ограничивают их в решении задач, решаемых другими способами.

Геометрические построения являются необходимой составляющей математической подготовки школьников. Позднякова, Е. В. [24] считает, что задачи на построение являются эффективным средством развития математической инициативы, нестандартного мышления и логических навыков учащегося. Задачи на построение удобно предлагать для закрепления теоретических знаний по любому разделу школьного курса геометрии.

Геометрические построения представляют собой важный инструмент формирования геометрических представлений у учащихся. В процессе выполнения этих конструкций ученики знакомятся с особенностями геометрических фигур и их взаимоотношений, а также учатся использовать чертежные инструменты и приобретают графические навыки. Кроме того, многие математические утверждения подтверждаются в процессе выполнения геометрических конструкций.

Исследование геометрических задач включает в себя:

- обобщение задачи;
- разбиение задачи на подзадачи;
- варьирование условия задачи;
- рассмотрение разных методов решения задачи;
- исследование “окрестности” задачи.

Помимо того, при решении задач на построение необходимо проводить исследование задачи, а именно определить условия, при которых она имеет решение, количество различных решений в каждом отдельном случае, а также условия, при которых задача не имеет решения. Кроме того, полезно проанализировать выполненное решение, чтобы определить, существует ли другой, более эффективный способ решения, можно ли обобщить задачу, и какие выводы можно сделать из данного решения. [23].

Таким образом, решение задач на построение хорошо иллюстрирует свою важную роль при формировании исследовательских умений учащихся.

В предыдущем параграфе мы выделили условия формирования исследовательских умений. Все вышеперечисленное позволяет сделать вывод о том, что данные требования можно реализовать при решении задач на построение. Таким образом, задачи на построение являются эффективным средством при формировании исследовательских умений.

Выводы по Главе 1

Анализ литературных источников по теме исследования и проведенный контент анализ позволил уточнить понятие «исследовательские умения». В рамках настоящего исследования принимается следующее определение.

Исследовательские умения – это приобретенная способность учащихся проводить наблюдения, эксперименты, выдвигать гипотезы и пр. для самостоятельного осуществления исследовательской, практической и интеллектуальной деятельности.

Исследовательские умения необходимы для реализации и возможности выполнять ряд операций для осуществления интеллектуальной и эмпирической деятельности, которая приводит к получению новых знаний. Существуют различные классификации исследовательских умений. Необходимо и можно развивать исследовательские умения абсолютно разными методами.

В процессе формирования исследовательских умений важно учитывать способности каждого отдельного ученика. Организация исследовательской деятельности в два этапа – практический и теоретический позволит повысить качество исследовательской компетентности в математическом образовании. Такая организация исследовательской деятельности способствует целостному развитию личности и ее мотивации к самосовершенствованию и саморазвитию.

Выделенные условия формирования исследовательских умений можно реализовать при решении задач на построение. Кроме того, одним из этапов решения задач на построение является исследование. Это говорит о том, что решение задач на построение всегда предусматривает развитие исследовательских умений. Проведенный сравнительный анализ школьных учебников показал, что не все авторы говорят о понятии и этапах решения задач на построение.

Глава 2. Методические особенности формирования исследовательских умений у учащихся в процессе решения задач на построение

2.1. Типы исследовательских умений, которые возможно формировать при решении задач на построение

Современное образование на любом уровне диктует необходимость овладения обучающимися какими-либо умениями и навыками. Одним из них являются исследовательские умения. Необходимость связана с информационной пластичностью современного мира, которая заставляет систему образования активно использовать исследовательские методы обучения, а также с внутренними задачами организации педагогического процесса. Одним из примеров является проведение оценки успеваемости и усвоения знаний, т. е. промежуточных аттестаций. Выполнение самостоятельных контрольных или тестовых заданий требуют применение исследовательских навыков и умений [31].

В. А. Гусев [5], опираясь на научные концепции творческой, исследовательской и учебной деятельности, выделил систему исследовательских умений при решении геометрических задач. Он утверждает, что исследовательская деятельность учащихся начинается и тесно связана именно с этими умениями. Перечислим эти исследовательские умение:

- умение выделять элементы задачи, то есть определять исходные объекты, их свойства и искомые;
- умение находить фигуры, попадающие под данный элемент задачи;
- умение выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи;

- умение устанавливать связи между полученными связями, которые, в конечном счете, и приводят к решению данной задачи;
- умение оценивать полноту и непротиворечивость системы связей;
- умение строить структурный граф проведенного исследования (решения задачи).

В примерной рабочей программе по математике, как на базовом [25], так и на углубленном уровне [26], одним из планируемых метапредметных результатов является результаты развития базовой исследовательской деятельности, такие как:

- использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему; самостоятельно устанавливать искомое и данное; формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
- проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой;
- самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
- прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

При решении разных задач на построение на уроках математики могут формироваться те или иные исследовательские умения. При решении одной задачи может развиваться сразу несколько умений, но при этом развивать одно и то же умение можно с помощью нескольких видов задач на построение. Рассмотрим эти умения поподробнее и определим, как и с помощью каких задач на построение на уроках математики возможно развивать их у учащихся.

Таблица 3.

Задачи на построение, способствующие формированию исследовательских умений

Планируемый результат	Каким образом формируется
умение использовать вопросы как исследовательский инструмент познания	данное умение развивается, когда ученики задают вопросы, касающиеся построения или решения задачи. (можно ли на данном этапе решить задачу, если нет, то почему)
умение формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему	при обсуждении различных вопросов, например «можно ли из заданных трех отрезков построить треугольник?», ученики формулируют проблему и противоречия, чтобы доказать свое мнение.
умение самостоятельно устанавливать искомое и данное	формируется при таких заданиях, когда по заданному рисунку необходимо достроить определенную фигуру. Учащиеся определяют какие части им даны, а каких не хватает. Так же, при решении задачи, в которой необходимо определить, какую геометрическую фигуру можно построить исходя из заданных условий.
умение формировать гипотезу	данное умение формируется при решении задачи, в которой необходимо найти множество точек, удовлетворяющих какому-либо геометрическому условию. Ученики предполагают ответ и после решения, подтверждают его, либо опровергают.
умение аргументировать свою позицию, мнение	при выполнении како-го-либо построения учащиеся, должны аргументированно доказать, что построение верное и удовлетворяет условию.
умение проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент	это умение можно развивать, решая задачу, в которой необходимо определить количество решений задачи, в зависимости от расположения данных элементов относительно друг друга.
умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой	формируется в процессе определения, как при изменении заданных условий, изменится результат построения. Учащиеся выполняют несколько построений и исследуют результат решения.
умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования	формируется, когда учащиеся, проделав какое-либо исследование, например при изучении количества решений от изменения заданных условий, отвечают на поставленные в задаче вопросы.
умение оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений	развитие этого умения происходит при оценке выполненного построения, при ответе следующие вопросы: соответствует ли полученная фигура искомой? Выполнены ли все условия задачи?
умение прогнозировать возможное развитие процесса	данное умение развивается, при ответе на вопросы о возможных результатах построения. Например: всегда можно ли построить треугольник, заданный тремя точками?

Планируемый результат	Каким образом формируется
умение выдвигать предположения о его развитии в новых условиях	формируется при прогнозировании результата построения при изменении какого-либо условия.

Согласно утверждениям Е. В. Поздняковой и В. И. Дьяковой [23], при решении задач необходимо проводить исследование самой задачи. Это означает, что нужно установить условия, при которых задача имеет решение, количество возможных решений в зависимости от смены условий, а также определить, когда задача вообще не будет иметь решения и почему. Кроме того, полезно проводить анализ уже найденного решения, чтобы выяснить, существует ли другой, более эффективный и быстрый способ решения, можно ли обобщить задачу или свести к аналогичной, решенной ранее, а также какие выводы можно сделать из этого решения.

А так как исследование и анализ являются этапами решения задач на построение, то соответственно, будут подразумевать исследование задачи. Оставшиеся два этапа тоже могут поспособствовать формированию исследовательских умений. Рассмотрим какие исследовательские умения развиваются на каждом из этапов (Таблица 4).

Таблица 4.

С какими исследовательскими умениями связаны различные этапы решения задачи на построение

Этап решения задачи	Какое исследовательское умение формирует
анализ	<ul style="list-style-type: none"> умение использовать вопросы как исследовательский инструмент познания умение формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему умение самостоятельно устанавливать искомое и данное умение формировать гипотезу умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой умение прогнозировать возможное развитие процесса
построение	умение проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент
доказательство	<ul style="list-style-type: none"> умение аргументировать свою позицию, мнение умение оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений
исследование	<ul style="list-style-type: none"> умение прогнозировать возможное развитие процесса умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по

	результатам проведённого наблюдения, исследования умение выдвигать предположения о его развитии в новых условиях умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой
--	--

Рассмотрим на примере.

Необходимо построить четырехугольник по трем сторонам и углам, принадлежащим к четвертой стороне.

Анализ. Предположим, что искомый четырехугольник $ABCD$ построен. В нем стороны AB , BC и CD и углы A и D являются данными. Предположим далее, что сторона CD подвергнута параллельному переносу, определяемому вектором CB . В таком случае она займет положение BD' . При этом прямая BD' наклонена к прямой AD под данным углом D . Ломаная ABD' может быть построена, а за ней и искомый четырехугольник $ABCD$.

Выполняя анализ, у учащихся формируются умения прогнозировать возможное развитие процесса, самостоятельно устанавливать искомое и данное, проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

Построение.

1. На стороне угла A откладываем отрезок AB .
2. Из точки B проводим прямую h , которая будет образовывать угол D с прямой AD .
3. На прямой h откладываем от точки B отрезок $BD' = CD$. Получаем точку D' .
4. Так как $D'D = BC$, построим окружность с центром в точке D' и радиусом BC . Получаем вершину D .
5. Проводим $BC \parallel D'D$ и $DC \parallel D'B$. Получим вершину C .
6. Получаем искомый четырехугольник $ABCD$.

На этапе построения у учащихся формируется умение проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент.

Доказательство.

Как видно из построения, в полученном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC и CD имеют данную величину. В то же время углы A и B равны данным.

При выполнении доказательства у учащихся формируется умение аргументировать свою позицию, мнение и умение оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений.

Исследование.

Решение возможно, если расстояние точки D' от прямой AD меньше данной стороны BC . Иначе окружность, описанная из точки D' и радиуса BC , не будет пересекать прямую AD .

Учитывая, что мы получаем сразу две точки пересечения D и D_1 с прямой. Они дают решения, если в соответствующих четырехугольниках углы A и D равны данным углам, а не смежным с ними.

Точка D дает решение - четырехугольник $ABCD$, в то время как точка D_1 , решения не дает, ибо в соответствующем ей четырехугольнике ABC_1D_1 , углы A и D , не равны данным углам, а дополняют их до 180° .

Это означает, что задача имеет либо одно возможное решение, либо не имеет совсем.

Благодаря этапу исследования у учащихся формируется умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного наблюдения, исследования, умение выдвигать предположения о его развитии в новых условиях, умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

Таким образом мы можем утверждать, что одна задача на построение может формировать не все исследовательские умения сразу, а только некоторые из них. Для развития различных умений необходимо решать различные виды задач.

Таким образом, мы показали, что задачи на построение являются одним из средств формирования исследовательских умений. Благодаря решению задач на построение на уроках геометрии, учащиеся развивают различные исследовательские умения. Они определяют данное и искомое, формулируют гипотезы, выполняют доказательства и аргументируют их, проводят несложные эксперименты, обобщают, оценивают результаты, прогнозируют и предполагают исходы при изменении условий. Нельзя не упомянуть о том, что предлагаемые большинством авторов этапы решения задач на построение, включают в себя этап «исследование». Это говорит, что при решении задач на построении всегда будут развиваться какие-либо исследовательские умения.

2.2. Требования к комплекту заданий, направленному на развитие исследовательских умений учащихся при решении задач на построение

При решении исследовательских задач человек расширяет свой кругозор и мышление, рассматривает задачу с разных сторон, он начинает знакомиться с новыми ситуациями, которые описаны в задаче, применяет математическую теорию для их решения, изучает, недоступные ему ранее, методы и теоретические разделы математики, которые необходимы для успешного выполнения задачи. Корректное обучение решению исследовательских задач помогает формировать у учеников честность и правдивость, настойчивость в преодолении трудностей, а также уважение к труду других участников.

Исследовательские задачи стимулируют творческую активность учеников, которая проявляется в стремлении узнать новые факты и использовать их при решении более сложных задач или для их упрощения, используя при этом теорию научных исследований. Решение таких задач помогает ученикам научиться самостоятельно находить и формировать умения, а затем применять математические знания на практике. Это также способствует развитию у учеников уважения к труду других участников исследовательской деятельности и преодолению трудностей.

Е.С. Бабинер [1] изучая данный вопрос выделил три типа исследовательских заданий.

1. Познавательные задания – это специально подобранные учебные задачи, направленные на развитие мышления учащихся. Они могут быть составлены на предметном материале или иметь практическую направленность. Эти задания активируют у учащихся всевозможные мыслительные процессы, такие как сравнение, классификация, систематизация и др.

2. Творческие задания могут носить форму загадки, могут быть составлены на основе необычного и интересного текста, содержать вопрос или задание. Такие задания привлекают любопытство учащихся, развивают интерес и активную деятельность на уроках.

3. Задание-исследование. Тема, изучение которой предусмотрено программой, предлагается для самостоятельного изучения под руководством учителя. Такие задания могут выполняться как индивидуально, так и в небольших группах.

По степени сложности анализа экспериментальных данных исследовательские задачи делятся на:

- задачи практикума;
- собственно исследовательские.

Задачи практикума служат для иллюстрации какого-либо явления. В данном случае происходит изменение определенного параметра, после чего изучается соответствующее изменение другого параметра. Полученный результат является стабильным и не требует дополнительного анализа. С помощью задач практикума можно отследить зависимости переменных, изменение количества решений и пр.

Исследовательские задачи являются одним из типов задач, которые широко используются в образовательных учреждениях. В таких задачах исследуемая величина зависит от нескольких простых факторов (например, загрязнения местности в зависимости от расстояния до трубы завода и погодных условий). Влияние этих факторов на исследуемую величину является прекрасным объектом для анализа, доступного для учащихся.

Исследовательские задания можно реализовывать в ходе уроков следующих форм:

- урок-исследование;
- урок-семинар.

После решения математических задач, требующих исследовательского подхода, важно, чтобы ученики продолжали исследование ответа и вывода. Они должны задавать вопросы о наличии решения, количестве возможных решений, особых случаях, которые могут возникнуть при рассмотрении каждой задачи, особенно тех, которые представлены в общем виде. Это необходимо с целью подробного изучения задачи, сравнения ее с подобными и возможного их объединения или классифицирования.

Для подготовки учеников к проведению исследовательской деятельности можно использовать различные методы работы, такие как:

- решение одной и той же задачи несколькими способами;
- решение задач, имеющих несколько верных решений;
- разбиение задачи на более простые подзадачи, выполнение которых уже известны учащимся;
- конструирование вспомогательной задачи, ее решение и возвращение к основной задаче и применение результата вспомогательной задачи для решения исходной;
- постановки системы вопросов решения, составление плана исследования, аргументация своих действий;
- формулирование более общей задачи по окончании решения данной задачи [29].

Дополнительная работа над задачей на уроках математики, упомянутая ранее, будет осуществляться на этапе исследования, так как она подразумевает работу над уже решенной задачей, а она будет являться такой уже после этапа доказательства.

На уроках необходимо, чтобы учитель математики выступал в роли организатора систематической самостоятельной поисковой деятельности учащихся. Его задача - помочь ученикам получить знания, приобрести умения и навыки, освоить способы умственной деятельности, а не преподнести уже готовый материал.

Развивающая функция исследовательской деятельности по математике заключается в том, что она способствует усвоению методов и стиля мышления, свойственных математике, воспитанию осознанного отношения к своему опыту, формированию черт творческой деятельности и познавательного интереса к различным аспектам математики. [8].

При составлении комплекта заданий Захарова Т. В. [12] выделяет следующие этапы:

Теоретический этап. На данной стадии необходимо определить основные понятия, факты и навыки, которые должны быть усвоены учащимися в процессе изучения задач на построение в соответствии с учебными требованиями. Так же эти теоретические знания безусловно будут необходимы для решения задач.

Отборочный этап. На этом этапе производится отбор задачного материала из учебно-методических комплексов. Если имеющиеся задачи не позволяют достичь поставленных целей или их недостаточно, то недостающие задачи создаются с помощью методов обобщения, конкретизации, составления обратных задач и варьирования. Для решения этих задач учащимся должно быть достаточно знаний, полученных на теоретическом этапе.

Связующий этап. На данном этапе проводится анализ выбранных задач с целью определения их взаимосвязей, соотношений, зависимостей и возможная их классификация по какому-либо принципу.

Структурирующий этап. С учетом правил упорядочивания задач и методов конструирования создаются системы задач, которые могут быть использованы на уроках, связанных с данной темой. Эти системы можно использовать, как при усвоении новых знаний и умений, так и при проведении промежуточных аттестаций.

Констатирующий этап. Осуществляется проверка соответствия созданных систем задач системным требованиям. Если необходимо, производится корректировка сконструированных систем задач.

Захарова Т. В. [12] предлагает следующие требования к комплекту задач, направленных на формирование исследовательских умений:

1. Доступность — это ключевой аспект при составлении заданий для учеников. Необходимо избегать задач, которые будут слишком сложными для них, чтобы сохранить их интерес к решению. Каждая задача должна быть посильной и понятной для всех учеников.

2. Однотипность задач также является важным фактором при составлении системы заданий. Однако, необходимо убедиться, что количество однотипных задач не превышает разумных пределов, чтобы учащиеся могли изучить различные методы решения и не устали. Это способствует формированию прочных знаний и умений.

3. Разнообразие - для того, чтобы не потерять интерес и внимание учащихся, в систему задач необходимо включать задания, которые будут отличаться друг от друга по форме, содержанию и способу решения.

4. Противопоставление - важно включать в систему задачи, которые будут основываться на сходных или взаимообратных понятиях.

5. Учет целей - при выборе задач для системы необходимо учитывать, какие цепочки могут быть достигнуты с помощью каждой задачи. Важно не забывать и общие цели использования задач, и их место в системе.

6. Ситуативность - при выборе задач необходимо предусматривать возможность применения полученных навыков и умений в различных ситуациях.

7. Полнота. Перед отбором задач системы необходимо выделить все понятия и факты, которые должны усвоить учащиеся, умения и навыки, которые они должны приобретать в процессе решения и учитывать их при составлении заданий.

Анализ задачи, поиск метода решения и запоминание происходит значительно эффективнее, когда они слышат и видят учебный материал одновременно. В настоящее время появилась возможность использовать электронные средства обучения и электронные программы при обучении задачам на построение. Чаще всего на практике учителя применяют следующие программы: «Живая геометрия», «Математический конструктор», «Kig», «GEONExT», «GEOGEBRA». В данных программах можно выполнять основные построения, а именно: откладывать отрезки и углы, равные данным, строить биссектрисы углов, вычислять отношения отрезков и многое другое. Построив чертеж, можно сохранить исходную модель, экспортировать, посмотреть и проанализировать зависимости между фигурами.

Одной из популярных в последнее время является математическая программа «Живая геометрия». Возможности программы позволяют облегчить процесс иллюстрации построения. В данной программе есть возможность построения динамических чертежей, что является большим плюсом при исследовании решений [11].

Чернышева Д. А. [35] считает, что программный продукт образовательного назначения «Живая геометрия» помимо произведения вычислительных операций, системы математических объектов дают возможность создания динамических образов, исследования устойчивости и изменчивости свойств объектов. Их использование в учебном процессе геометрии способствует созданию визуальных образов математических объектов, ускоряет процесс усвоения нового материала, экономит время на выполнение математических расчетов и построений, а также позволяет увеличить количество заданий для самостоятельного изучения, сокращая время на вычисления и т.д.

«Живая геометрия» позволяет выполнять геометрические построения на компьютере таким образом, что при изменении одного из геометрических

объектов чертежа остальные также изменяются, сохраняя заданные между собой соотношения неизменными. Кроме указанной отличительной черты, интерактивные геометрические среды позволяют создавать более наглядные чертежи, анимации и другие визуальные эффекты. Операционная система интерактивной геометрии соответствует системе операций, используемой в обычной геометрии. В то же время "Живая геометрия" имеет более широкий набор элементарных операций, чем геометрия на бумаге, включая, например, деление отрезка пополам или построение угла, равного данному. Это дает учащимся возможность изучать математические понятия в процессе работы, исследуя их сущность и получая интуитивный опыт. [35].

Таким образом мы выделили виды исследовательских заданий. Определили формы уроков, в ходе которых они могут реализовываться. Перечислили приемы работы, которые можно использовать в качестве подготовки к проведению исследовательской деятельности. Выделили этапы и требования, которые должны учитываться при составлении заданий. Было определено, что выполнять построения наиболее удобно с помощью программы «Живая геометрия».

2.3. Комплект заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

Исходя из выделенных в предыдущем параграфе требований, составим комплект заданий к задачам на построение, направленных на формирование исследовательских умений учащихся.

В задачах, в которых требуется построить какой-либо объект, на этапах анализа, построения и доказательства задания являются аналогичными. Рассмотрим их.

Задание 1. Определите исходные объекты и их свойства.

Это задание формирует умение самостоятельно устанавливать искомое и данное.

Задание 2. Возможно ли решить задачу, используя только заданные объекты?

Задание 3. Возможно ли решение задачи, при отсутствии какого-либо заданного объекта?

Задания 2, 3 формируют умение использовать вопросы как исследовательский инструмент познания.

Задание 4. Составьте вопросы касающиеся поиска решения для соседа по парте.

Данное задание формирует умение формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему.

Задание 5. Выдвиньте предположение о том, какой объект будет являться решением задачи.

Благодаря этому заданию формируется умение формулировать гипотезу.

Задание 6. Определите объект, требующий построения и его свойства.

В этом задании формируется умение самостоятельно устанавливать искомое и данное.

Задание 7. Определите можно ли решить задачу, не выполняя дополнительных построений?

Задание 8. Предположите, что задача решена и выполните рисунок требуемого объекта.

В процессе выполнения задания формируется умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

Задание 9. Укажите порядок выполнения элементарных построений.

Формирует умение проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент.

Задание 10. Проверьте, удовлетворяет ли построенная фигура свойствам, определенным в задании 2.

Задание способствует формированию умения оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений.

Задание 11. Докажите, что построенная фигура, является требуемой. Для этого обоснуйте, что каждое ее свойство удовлетворяет свойствам, определенным в задании 2.

В данном задании формируется умение оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений, умение аргументировать свою позицию, мнение.

На этапе исследования задания отличаются в зависимости от условий задачи. Рассмотрим задачи и задания к ним на этапе исследования.

В процессе выполнения заданий построения выполняются в программе «Живая геометрия». Данную работу возможно реализовать, в условиях компьютерного класса, дистанционного урока или в виде домашнего задания.

При отсутствии возможности реализации решения в программе «Живая геометрия» построения выполняются в тетрадах.

Задача 1. Найти множество точек середин хорд одинаковой длины, проведенных в окружности.

Этап анализа. Предположим, что задача решена и множество точек, середин хорд одинаковой длины, проведенных в окружности, построено.

Сначала необходимо построить хорду на окружности. Расстоянием от центра окружности до середины данной хорды будет являться серединный перпендикуляр. Так как хорды равны, то они будут находиться на одинаковом расстоянии от центра окружности. Это значит, что середины всех равных хорд лежат на окружности, имеющей общий центр с данной, и имеющей радиус равный серединному перпендикуляру от центра окружности до хорды. Все хорды будут касаться этой окружности своими серединами.

Построение.

1. Из произвольной точки A , лежащей на данной окружности проводим дугу радиуса, равного длине данной хорды. При пересечении с окружностью получаем точку B . Строим хорду AB .

2. Из центра O проводим прямую OC , перпендикулярную этой хорде AB .

3. Строим окружность (O, OC) .

Доказательство. Так как диаметр, проведённый через середину хорды, не проходящей через центр, перпендикулярен к ней, то окружность имеющая общий центр с данной и радиус равный расстоянию от центра до середины хорды будет являться искомым множеством.

Исследование.

Задание 1. При каких условиях задача не будет иметь решений?

Задача не имеет решения, если данная хорда больше диаметра данной окружности.

Задача 2. Построить треугольник по трем сторонам, длина каждой из которых равна длине одного из заданных отрезков.

Задание 1. Изменяя длины сторон треугольника, определить, при каких условиях задача не будет иметь решений.

При выполнении задания учащиеся выбирают один из данных отрезков, от концов которого будут откладывать и менять длины двух оставшихся отрезков. Кроме изменения длин сторон, учащиеся могут менять углы поворота сторон.

Решением задания будет выведение неравенства треугольника: сумма длин двух любых сторон треугольника строго больше длины третьей.

Данное задание развивает умение выдвигать предположения о его развитии в новых условиях и умение самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования.

Задание 2. Выясните, какое количество и каких заданных условий достаточно, для построения треугольника.

При выполнении этого задания, учащиеся определяют, какие условия задачи могут быть даны, а это: три стороны, три угла, три высоты и пр. Учащиеся предполагают заданные условия и проверяют возможность построения треугольника.

Ответом будет являться: три элемента, например, три стороны, две стороны и угол между ними, две стороны и высота, проведённая к одной из них, сторона и два прилежащих к ней угла и т. д.

Это задание способствует формированию умения выдвигать предположение о развитии решения в новых условиях, умение прогнозировать возможное развитие процесса.

Задача 3. Построить квадрат, если известно: O – центр квадрата, A и C – точки, лежащие на параллельных сторонах этого квадрата.

Задание 1. Определите, каким образом необходимо располагать точки A и C относительно центра квадрата, чтобы задача имела решение.

Выполняя это задание учащиеся в приложении «Живая геометрия» двигают точки A и C , а вместе с ними передвигаются построения (рис. 11,12).

Результатом работы будет являться условие, что меньший угол AOC должен быть не меньше 90 градусов.

Задание формирует умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

Задание 2. Существует ли такое расположение заданных точек, при котором задача будет иметь более одного решения?

Ответ. Если заданные точки будут располагаться симметрично относительно центра, то решений будет бесконечно много.

Выполнение этого задания формирует умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Задача 4. Даны две параллельные прямые l и k и точки P и M , не принадлежащие им (Рис. 13). Постройте точку, которая будет равноудалена от данных прямых и точек.

Решением данной задачи будет являться точка G – пересечение серединного перпендикуляра g к отрезку MP и прямой h , параллельной l и k , являющейся их осью симметрии (рис. 14).

Задание 1. Как может поменяться решение задачи в зависимости от расположения точек и прямых?

Учащиеся устанавливают возможные случаи: а) прямая MP перпендикулярна прямым l и k и точки M и P (или P и M) равноудалены от прямых l и k соответственно. Тогда прямые g и h совпадут, отсюда, задача будет иметь бесконечное множество решений; б) прямая MP перпендикулярна прямым l и k , но точки M и P не равноудалены от прямых l и k соответственно. Прямые g и h параллельны, следовательно, задача не

имеет решений; в) в остальных случаях прямая g пересекает прямую h в одной точке, поэтому задача имеет одно решение.

Задача способствует формированию умения выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Учащимся могут быть предложены так же практико-ориентированные задачи и задания к ним. Рассмотрим их.

Задача 5. На берегу реки требуется построить водонапорную башню для снабжения водой двух сел так, чтобы общая длина труб от водонапорной башни до обоих сел была наименьшей.

Этап анализа. В данной задаче река будет являться прямой, а села точками. Решение задачи может меняться в зависимости от расположения точек. Если точки расположены на разных сторонах относительно прямой, то решение элементарное – точка пересечения данной прямой и прямой, образованной двумя точками. Если точки располагаются на разных сторонах относительно прямой, то необходимо сначала построить точку, симметричную одной из данных, таким образом прийти к первому случаю.

Построение.

1. Построим точку F , симметричную точке D относительно прямой f .
2. Проведем прямую CF .
3. Найдем точку пересечения FC с прямой f . Водонапорную башню следует строить в точке G .

Доказательство. Так как F симметрична D , то $FG=DG$, а соответственно CF – минимальное расстояние между точками C и D , касающееся данной прямой.

Исследование. Задача будет иметь одно решение в случае, если хотя бы одна точка не лежит на заданной прямой.

Задание 1. Существует ли такое расположение точек, при котором задача не будет иметь решения?

Ответ. Нет. Задача всегда будет иметь хотя бы одно решение.

Задание 2. Как изменится ответ, если обе точки будут лежать на заданной прямой?

Ответ. В случае, когда обе точки лежат на прямой, решений бесконечно много.

Задания развивают умения умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение выдвигать предположения о развитии решения в новых условиях

Задача 6. От разрушенного забора квадратной формы удалось обнаружить на каждой стороне по столбу, на котором он крепился. Необходимо восстановить забор.

Задание 1. Определите, сколько способов решения будет иметь задача, если убрать условие о том, что каждый столб располагается на отдельной стороне.

При неизвестном расположении точек задача приобретет новые возможные варианты решения в зависимости от их расположения. Появится три основных случая.

1. Все 4 точки лежат на одной прямой. Так как в таком случае не будет обозначена длина стороны, то задача будет иметь бесконечно много решений.

2. Три точки лежат на одной стороне квадрата. Но при этом четвертая точка может располагаться как на противоположной стороне, так и на смежной. Таким образом этот случай делится еще на два, каждый из которых будет иметь разное решение.

3. Если две точки будут лежать на одной стороне квадрата, то возможны следующие случаи: а) две оставшиеся точки лежат на одной стороне, при этом возможны варианты, когда они лежат на противоположной стороне или на смежной стороне; б) две другие точки лежат на разных прямых, отличных от первой. Возможными вариантами будут: расположение

каждой точки на одной из параллельных сторон; расположение на смежных сторонах, при этом одна из сторон будет параллельна той, на которой лежат две точки, а другая на одной из двух ей смежных сторон.

Таким образом, учащийся находит семь способов восстановления квадрата по четырем точкам, которые будут зависеть от их расположения. В каждом способе количество решений будет различной, но в общей сумме их окажется бесконечное множество.

Заметим, что в условии задания содержится неопределенность относительно расположения четырех известных точек. Поэтому в процессе решения данной задачи у учащихся формируется умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение выдвигать предположения о развитии решения в новых условиях.

Задача 7. Вблизи трех деревень необходимо проложить автомобильную трассу таким образом, чтобы расстояния до деревень были одинаковыми и минимальными.

В данной задаче деревни будут являться точками, а дорога прямой.

Задание 1. Возможно ли построить дорогу таким образом, чтобы все деревни располагались на одной стороне относительно дороги?

Ответ: Нет. Чтобы выполнялось условие равенства расстояния и расположения точек на одной стороне относительно прямой, необходимо расположить точки на одной прямой. Но так как расстояние до искомой прямой должно быть минимальным, то эта прямая совпадет с прямой, на которой расположены точки.

Задание формирует умение прогнозировать возможное развитие процесса, умение проводить исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой.

Задача 8. Жители селений А и В просили сделать остановку на кольцевой дороге на одинаковом расстоянии от этих сел. Найти место для остановки.

В результате анализа условия данной задачи выделяются три объекта: точки А и В, окружность; два отношения: принадлежности (искомая точка, расположенная на окружности) и равноудаленности (искомая точка, равноудаленная от данных точек). Решение состояло из построения серединного перпендикуляра к отрезку, образованному из данных точек и нахождения точки пересечения этого перпендикуляра с данной окружностью.

Задание 1. При каком условии задача не будет иметь решения?

Ответ: Задача не будет иметь решения в случае, если серединный перпендикуляр и окружность не будут иметь точки пересечения.

Задание 2. Что изменится, если серединный перпендикуляр пересечет окружность в двух точках?

Ответ: В таком случае задача будет иметь два решения.

Задание 3. Может ли задача иметь более двух решений?

Ответ: Нет.

Учитывая, что решение задач и выполнение заданий к ним отнимает большое количество времени от урока, то возможно выполнение заданий по уже готовым решениям. То есть, учащиеся получают условия задачи с выполненным решением и задания к ним.

Таким образом, выполняя предложенные задания к задачам на построение у учащихся будут формироваться различные исследовательские умения. Задачи могут быть практико-ориентированного типа. Учащиеся решают задачу, а затем выполняют задание либо только задание к уже решенной задаче.

Выводы по Главе 2

Таким образом, можно сделать вывод о том, что задачи на построение являются одним из средств формирования исследовательских умений. Это

связано с тем, что на уроках геометрии учащиеся определяют данное и искомое, формулируют гипотезы, выполняют доказательства и аргументируют их, проводят несложные эксперименты, обобщают, оценивают результаты, прогнозируют и предполагают исходы при изменении условий.

Было выделено 4 этапа решения задач на построение: анализ, построение, доказательство, исследование. Это говорит, что при решении задач на построение, этап «исследование» уже подразумевает развитие каких-либо исследовательских умений.

Дали определение исследовательским заданиям и выделили их виды. Определили формы уроков, в ходе которых они могут реализовываться. Перечислили приемы работы, которые можно использовать в качестве подготовки к проведению исследовательской деятельности. Выделили этапы и требования, которые должны учитываться при составлении заданий. Было определено, что выполнять построения наиболее удобно с помощью программы «Живая геометрия».

Были предложены задания к задачам на построение, благодаря которым у учащихся будут формироваться различные исследовательские умения. Выполняя задачи в программе «Живая геометрия», учащиеся могут экономить время, вносить большое количество правок и изменений в условия, что повышает эффективность обучения.

Заключение

Сопоставление результатов работы с поставленными задачами позволяет заключить следующее :

1. Была проанализирована психолого-педагогическая, методическая литература и Интернет-ресурсы. Это позволило определить сущность понятия «Исследовательские умения», выделить их виды, необходимость формирования. Выяснилось, что исследовательские умения необходимы для возможности выполнять ряд операций, которые приводят к получению новых знаний.

2. Были определены факторы, условия и принципы организации учебного процесса, способствующие развитию исследовательских умений, причины ее торможения. Было предложено организовывать исследовательскую деятельность в два этапа, что способствует всестороннему развитию личности. Таким образом мы выделили дидактические условия формирования исследовательских умений при обучении математике.

3. Мы определили понятие «Задача на построение», выделили элементарные построения, этапы и методы решения задач на построение. Произведенный анализ рабочих программ и сравнение школьных учебников позволило нам определить их место в школьном курсе геометрии.

4. В соответствии с требованиями примерных рабочих программ по математике на базовом и углубленном уровнях были выделены типы исследовательских умений, которые возможно формировать при решении задач на построение.

5. Определены виды исследовательских задач, этапы составления исследовательских задач и требования к комплекту заданий, которые должны учитываться при составлении заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

6. На основе выделенных требований разработан комплект заданий, направленных на формирование исследовательских умений учащихся при решении задач на построение.

Таким образом, следует считать, что задачи исследования полностью выполнены, цель достигнута.

В дальнейшем продолжении работы возможно проведение более подробного исследования методов решения задач на построение. Это связано с тем, что как выяснилось, школьные учебники предлагают для изучения недостаточное количество методов решения.