Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

Развитие вариативного мышления учащихся 7-9 классов при решении геометрических задач

Выпускная квалификационная работа

Направление подготовки «44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) Математика и информатика»

Допущена к защите	Исполнитель:
«___»_____________20___ г.	Садыкова Виктория Николаевна
Научный руководитель:	студентка группы МиИ-1801
_______________________	Научный руководитель:
	Дударева Н. В.,
Работа защищена на оценку	к.п.н., доцент кафедры ВМиМОМ
_______________________	

Екатеринбург 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В современном обществе существует потребность в умениях находить нестандартные подходы к решению тех или иных проблем. Человеку, как личности, необходимы навыки в сравнении возможных вариантов действий, анализа их последствий и принятия наилучшее решение в условиях множественного выбора. Человек, обладающий способностью к широкому и многоплановому мышлению, может не только добиться успеха в своей профессиональной деятельности, но и расширить горизонты мировоззрения. Такие способности зависят от уровня развития вариантного мышления.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования предполагает направленность образования не только на формирование предметных знаний, но и на развитие метапредметных знаний и основных качеств личности. К ним относятся формирование мотивации обучающихся, навыков самостоятельного планирования, умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией, то есть умение использовать разные методы для достижения целей, умение выбирать успешные стратегии. Все это подчеркивает важность целенаправленного развития вариативных качеств личности.

В современных условиях обучающиеся сталкиваются с огромной умственной нагрузкой на уроках математики, что требует серьезных усилий для поддержания интереса и активности в течение всего урока. Обладание навыком решения задач - это ключевой компонент изучения геометрии. Умение решать геометрические задачи способствует формированию познавательного интереса к изучению предмета. Однако, в школах обучающимся по прежнему нередко навязывается единый образ мыслей и действий. В таких условиях особенно сложно обучаться творческим детям, для которых особенно важно отсутствие «рамок». Зачастую учащиеся просто не знают, что изучаемые ими математические объекты часто допускают альтернативные интерпретации, что позволяет им многое узнать об их свойствах, выявить важные взаимосвязи и сделать обобщения. Благодаря этому многие проблемы можно рассматривать с разных сторон, особенно на основе визуальных образов, что приводит в более рациональному и «красивому» решению. Таким образом, процесс обучения геометрии позволяет наиболее эффективно формировать и развивать вариативное мышление обучающихся.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в средней школе.

Предмет исследования: дивергентные задачи как средство формирования вариативного мышления обучающихся в процессе изучения геометрии.

Цель: Разработать комплект геометрических задач, способствующих развитию вариативного мышления учащихся 7-9 классов.

Задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую, методическую литературу и Интернет-ресурсы с целью выделения сущности понятия и структуры вариативного мышления
2. Охарактеризовать методические приемы развития вариативного мышления обучающихся.
3. Выделить особенности дивергентных геометрических задач, способствующих развитию вариативного мышления учащихся.
4. Разработать требования к комплекту задач, направленного на развитие вариативного мышления.
5. Составить комплект геометрических задач, способствующих развитию вариативного мышления учащихся 7-9 классов.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ВАРИАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ 7-9 ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Сущность понятия «вариативное мышление» и его структура.

В процессе восприятия и ощущения человек познает окружающий мир посредством органов чувств и непосредственного отражения. Однако природа и внутренние законы вещей не могут быть отражены и в нашем сознании. Чувства не могут напрямую воспринять какой-либо образ.

Люди познают мир, отражают общие признаки вещей, обобщают результаты чувственного опыта. Для познания окружающего мира недостаточно просто обратить внимание на связь между явлениями, надо определить, что эта связь является общим свойством вещей. На основе этого обобщения решаются реальные познавательные задачи.

Мышление дает ответ на такие вопросы, которые нельзя допустить путем чувственного, непосредственного отражения. Благодаря мышлению человек правильно ориентируется в окружающем мире, используя ранее усвоенные обобщения в реальных новых ситуациях. Деятельность человека рациональна благодаря пониманию взаимосвязи между объективной реальностью и законами.

С точки зрения *психологии*:

Мышление — процесс взаимодействия познающего субъекта с познаваемым объектом, ведущая форма ориентирования субъекта в действительности.

Под мышлением Выготский понимает способность на основе известных знаний и воображения добывать новую информацию.

В отличие от психологической парадигмы, которая основывается обычно на экспериментальных данных, философский взгляд на природу когнитивных процессов основан на определенных социокультурных установках и разделяет понятия идеального и материального мира. Базовая философская модель мышления, учитывающая целостность природы человека, воспринимается как атрибут философского взгляда на явления действительности и все активнее влияет на многие области знаний, в частности, на психологию.

С точки зрения *философии*:

В философском словаре Розенталя можно найти следующее определение: «Высший продукт особым образом организованной материи — мозга, активный процесс отражения объективного мира в понятиях, суждениях, теориях и т. п. Мышление возникает в процессе общественно-производственной деятельности людей и обеспечивает опосредствованное отражение действительности, раскрытие ее закономерных связей».

Таким образом, можем прийти к выводу, что понятие мышление может использоваться в широком смысле: это активная познавательная деятельность субъекта, необходимая для его полноценной ориентации в окружающем природном и социальном мире. При решении более специальных исследовательских задач, при изучении конкретных психологических механизмов высших познавательных процессов мышление определяют в узком смысле – как процесс решения задач.

В данной работе будем придерживаться определения мышления в широком смысле.

По стратегии поиска решения проблем мышление подразделяют на *конвергентное* и *дивергентное*. Понятие дивергентного мышления впервые возникло в работах американского психолога Д. Гилфорда, который определял его как «тип мышления, ищущий в различных направлениях». Дополнением к нему служит так называемое конвергентное мышление, которое «основано на стратегии точного использования предварительно усвоенных алгоритмов решения определенной задачи, т. е. когда дана инструкция по последовательности и содержанию элементарных операций по решению этой задачи».

При обсуждении темы о природе мышления, возникает вопрос о различии мышления взрослого человека и ребенка. Мышление взрослого человека направлено на приспособление к сложным ситуациям реального мира и не смешивается с фантазиями. Однако, мышление ребенка не всегда направлено на организацию соответствующей адаптации к окружающему миру. Ребенок часто живет в мире фантазий и оценивает все события по принципу «удовольствие-неудовольствие».

Взрослый человек организует свои действия таким образом, чтобы удовлетворить потребность или отказаться от ее удовлетворения. Ребенок не способен к организованным действиям и идет своим путем. Если реальный мир не дает ему того, что ему нужно, он компенсирует это фантазией, создавая иллюзорный мир, где исполняются все его желания. Игра и воображение заменяют реальную деятельность у детей.

В подростковый период мышление меняется, то есть возникают психические новообразования, которые способствуют улучшению способности мыслить критически и абстрактно. Подростки учатся мыслить последовательно, происходит переход от конкретно-образного мышления к абстрактному. Также в этот период важным аспектом является развитие творческого мышления. Средний школьный возраст считается наиболее благоприятным для формирования творческого мышления. Актуально в этот период будет предлагать обучающимся различные проблемные задачи, направленные на формирование причинно-следственных связей. Для подростков авторитет учителя или учебника уже не является настолько значимым, так как формируется собственное мнение, и как следствие возражения и разногласия.

Изменения в психической деятельности подростков важны для того, чтобы справляться с более сложными жизненными задачами и глубже понимать мир. Вариативное мышление необходимо потому, что в процессе жизни каждый человек сталкивается с новыми, неизвестными ранее свойствами предметов и явлений. Предыдущих знаний недостаточно и человек испытывает дискомфорт, который пытается преодолеть. Вот тут-то и приходит на помощь вариативное мышление.

Вариативность мышления - в психологии понимается, как способность человека находить разнообразные решения. Вариативность мышления определяет возможности человека творчески мыслить, помогает ориентироваться в реальной жизни.

Поддъяков Н.Н. под вариативностью понимает «умение находить разнообразные способы реального преобразования предмета».

Понятие «вариативное мышление» в теории педагогики мало изучено, как и в философии и психологии. Однако, в педагогической практике, сущность понятия постепенно раскрывается. Этому способствует деятельность как школьных учителей, так и ученых, занимающихся данной проблемой. На уроках ученики осознанно или неосознанно ищут варианты решения задач, строят гипотезы, подбирают синонимы, разрабатывают алгоритмы и моделируют.

Основой грамотности чтения является способность к вариативному мышлению. Ученик, который овладевает методами сравнения, противопоставления, синтеза и обобщения, уже в некоторой мере оперирует вариантами. Однако, следует отметить, что развитие учеников в направлении вариативного мышления происходит реже, так как для этого учителю необходимо владеть определенными знаниями и умениями, а также личной способностью к вариативному мышлению.

Часто развитие вариативного мышления учеников протекает неуправляемо, спонтанно, что явно противоречит педагогической задаче. Это требует серьезного осмысления.

Таким образом, в современной науке актуальными являются задачи разработки теоретических основ понятия «вариативное мышление», определение ее значения в структуре личности и в раскрытии познавательной функции интеллекта, выявление закономерности его педагогического развития, условия и методы работы над ним.

Термин «вариативное мышление» употребляется в значении «мышление вариантами». Такое мышление в той или иной степени свойственно каждому индивиду, так как оно есть понимание возможности различных способов решения задачи и умение осуществлять их систематический перебор.

Изучение научно-педагогической литературы выявило основные свойства вариативного мышления и его личностную важность.

Вариативное мышление — качество гуманистической личности: «Важнейшими качествами гуманистической личности являются творческая активность, вариативное мышление, развитое стремление к созиданию. Цель социально-гуманитарного образования заключается в создании оптимальных условий для становления такой личности» (А. В. Хорошенкова).

Учитель должен уметь мыслить вариативно: «Вариативное — то есть гибкое мышление. Вариативное, гибкое мышление учителя — основа его способности создавать индивидуализированную образовательную микросреду на уроке. Учитель должен обладать вариативным мышлением» (И. С. Сергеев).

В.В. Князева же пишет: «Вариативное мышление — это способность личности к деятельному варьированию операциями мыследействия, вербальным, математическим, графическим или иным знанием, аналогиями, переноса внутреннего во внешнее и внешнего во внутренне».

Далее С. М. Крачковский обобщил понятие вариативного мышления. Он понимает под вариативным мышлением «общую сформированную установку мыслительной деятельности обучающихся на отыскание различных способов достижения цели в отсутствии непосредственного указания на это, способность осуществлять мысленное преобразование объекта, находить различные его черты».

Способность к вариативному мышлению направляет мыслительную деятельность на поиск различных способов решения задач и способствует быстрому нахождению новых качественных результатов. Эта способность позволяет искать несколько выходов при решении одной проблемы и использовать идеи для получения различных результатов. Вариативное мышление присутствует в разных видах мышления, таких как понятийное, критическое, практическое, теоретическое и другие, и формирует открытость личности.

Вариативное мышление является важной частью мыслительной деятельности, включая творчество. Оно способствует продуктивности и адаптируемости к новым условиям. В отличие от творческого мышления, вариативное мышление обеспечивает более надежный успех. Однако, вариативное мышление также является важным компонентом творческого мышления. Достаточное и своевременное формирование способности к вариативному мышлению может облегчить продвижение ученика к вершине собственной креативности.

«Творческое мышление можно формировать, используя определенный комплекс развивающих игр и упражнений. Вариабельность решений зависит от умений правильно выполнять задания и оригинально мыслить» (В. В. Князева). Более того, экспериментально установлено, что игра в шахматы развивает креативное мышление, повышает точность выполнения заданий, формирует способность «видеть» варианты, т. е. благотворно воздействует на вариабельность творческих решений.

Умение ученика к самостоятельному творчеству является ключевым фактором в учебной деятельности и жизнедеятельности в целом. Жизнь непрерывно выставляет сложные задачи и проблемы, которые требуют преодоления различных трудностей, и именно вариативное мышление помогает справляться с ними. Важно понимать, что процесс познания образа мира является сложным и требует от нас активного участия. Вариативное мышление помогает "узнавать" в неизвестном уже знакомые "черты".

С самого детства важно развивать навыки "правильного мышления",, то есть умение ориентироваться в событиях и использовать свои знания с пользой. Это напрямую зависит от способности к вариативному мышлению.

Поэтому нужно учиться принимать рациональные решения и развивать самостоятельность в мышлении еще на учебных занятиях в школе.

Для повышения вариативности мышления необходимо использовать соответствующие методы, которые помогут приобрести новый опыт и знания. Важно понимать, что даже в нетворческих заданиях необходимо строить работу таким образом, чтобы были представлены разные варианты решения. Это является важным элементом обучения, поскольку такой подход помогает школьникам учитывать различные способы решения и записи условий для одной и той же задачи, а также разные способы решения жизненных ситуаций. Основной целью такого подхода является возможность увидеть разницу между разными способами решения задач.

Умения, которые приобретаются в процессе обучения, могут оказаться полезным не только на уроках, но и в повседневной жизни. Когда человек сталкивается с какой-то проблемой или задачей, он может использовать свой опыт для рассмотрения разных подходов и выбора наиболее оптимального. Это может быть полезно как для ребенка, так и для взрослого.

Таким образом, вариативность мышления обеспечивается в результате работы мысли, направленной на:

- установление множественности проявлений объекта;
- выработку способности рассматривать объект с нескольких точек зрения и с позиций разного знания;
- формирование умений обнаружить и поставить новые проблемы в знакомой ситуации, а в незнакомой не потеряться и суметь отыскать необходимое знание для приложения к решению;
- использование различных стратегий решения проблемы и присущего ситуации комплекса тактических приемов и методов;
- осмысленный поиск альтернативных решений с целью нахождения оптимального;

- выработку способности выделять качественные стороны объекта, различать оттенки возникающих идей, то есть развивать «внутреннее видение»;
- на развитие дивергентных и конвергентных качеств мышления;
- умение распознавания лучшего варианта;
- выработку способности принимать решение;
- выработку привычки мыслить вариантами.

Выделим основные *функции* вариативного мышления (по В.В. Князевой):

- развивающая (развивает воспитательную готовность, кругозор, конструктивные свойства и качества мышления, его активность),
- объективизирующая (поднимает мышление до уровня объективного восприятия объекта),
- конструирующая (преобразует мозаичное мышление в системное),
- системообразующая (входит в состав различных видов мышления, усиливая их потенцию),
- выбора (верного направления мысли, решения),
- дивергентная,
- конвергентная.

Таким образом, можем выделить *ведущий принцип* — принцип вариативности, предполагающий развитие вариативного мышления как понимание возможности различных вариантов решения задачи и умение осуществлять их систематический перебор.

Для формирования вариативности мышления необходимо целенаправленное воздействие. Объект, включенный в новые связи, проявляет новые качества и свойства, которые впоследствии отражаются в новых понятиях и образах. Развитие способности к вариативному мышлению эффективно при проблемном обучении, что отражает необходимость тщательного планирования содержания этого процесса.

1.2. **Методические приемы развития вариативного мышления учащихся**

В психологии термин «вариативное мышление» означает, что у человека сформирована установка на то, чтобы отыскать различные способы достижения поставленной цели в отсутствие о ней непосредственной информации, способность мысленно изменять объект и находить его черты. Развитие вариативного компонента мышления – это признак гибкости и самостоятельности мышления, творческого потенциала и способности к творчеству.

В современном обществе, представителям различных профессий приходится сталкиваться с ситуациями, требующими навыков поиска неочевидных путей решения проблем, анализа возможных последствий и принятия оптимальных решений при множественном выборе. Развитие вариативного мышления является ключевым фактором, открывающим новые горизонты как в профессиональной деятельности, так и в личном восприятии мира каждым человеком. Эта способность позволяет воспринимать действительность с широкой и многогранной точки зрения, что является крайне актуальным в наше время.

На уроках математики часто преподносят единственный способ мышления и решения задач, что ограничивает возможности учеников. Важно развивать целенаправленное мышление, особенно визуальное, которое может помочь решить задачи более эффективно и красиво. Изучаемые математические объекты можно рассматривать с разных точек зрения, что поможет лучше понять их свойства, взаимосвязи и обобщить. Поэтому важно не просто делать, как показано, но и искать альтернативные пути решения задач.

В организации процесса обучения математике часто игнорируются разные методы. Некоторые преподаватели запрещают применение иных подходов, кроме тех, что были представлены на уроке. Это может негативно сказаться на творчески одаренных учениках, которые теряют интерес к математике в таких условиях.

Однако не следует думать, что легко сподвигнуть обычного школьника к творческому подходу к решению задач и рассмотрению их с разных сторон. Большинство учеников привыкают действовать по определенной схеме, и отучить их от этого бывает совсем непросто. «Но легче усвоить тысячу новых фактов в какой-нибудь области, чем новую точку зрения на немногие известные уже факты», – писал Л. С. Выготский.

Поэтому необходимо развивать возможности школьников к разнообразию идей, вариантов и их свободному выбору. Процесс обучения математике позволяет формировать вариативные качества мышления.

На основе анализа работ С.М. Крачковского и В.В. Князевой сформулируем основные методы развития вариативного мышления школьников.

1. *Сопоставление различных способов решения одной и той же задачи.*

Перед началом решения задачи данный метод позволяет мысленно просчитать возможные подходы и выбрать наиболее рациональный. Регулярный анализ разных способов решения математических задач помогает развивать творческое мышление, влияет на личные качества и научные взгляды учащихся и, конечно, формирует навык "видеть" различные варианты решения задачи . Этот метод обучения является ключевым для успешного понимания математики и методов ее преподавания. Он способствует достижению важных целей в обучении, в том числе в формировании возможностей для вариативности мышления. Для того, чтобы обучающиеся могли проявлять свои сильные стороны, важно предлагать задания, которые позволяют каждому предложить собственный способ решения.

Одна из возможных методик - дать всем обучающимся одну задачу и организовать обсуждение решений, чтобы обеспечить многообразие подходов. Это способствует формированию социальной толерантности среди обучающихся, позволяет им осознать, что существуют возможность рассмотрения задачи с разных точек зрения. При этом обучающиеся приходят к одному результату, некоторые даже более рациональным и «красивым» способом. Обнаружение нескольких решений одного математического вопроса всегда представляет интерес и является важным фактором, который может стимулировать учебный процесс.

Поиск кардинально нового подхода к проблеме, особенно нестандартного подхода, часто становится неожиданным и запоминающимся моментом на уроке. И, когда идеи предлагаются не учителем, а учениками, это формирует познавательный интерес к предмету. Учащиеся обычно увлекаются процессом поиска и сравнения разных решений, что побуждает их думать о задаче, а не просто следовать шаблонам. И. С. Якиманская пишет: «Познавательные способности характеризуются активностью субъекта, его возможностью выйти за пределы заданного, преобразовать его, используя для этого разнообразные способы». В доказательство приводится цитата Б. М. Теплова: «Нет ничего не жизненней и схоластичнее идеи, что существует только один способ успешного выполнения всякой деятельности; эти способы разнообразны, как разнообразны человеческие способности».

2. *Решение задач с неоднозначностью в условии.*

Обучающимся следует изучить несколько ситуаций, что, зачастую, приводит к множеству вариантов ответа. Такие многовариантные задачи широко используются в геометрии. Необходимо предлагать такие задачи учащимся время от времени на уроках без предупреждения, что обеспечит развитие привычки «проверять» наличие нескольких возможных вариантов реализации условия. В таком случае формируются качества критичности, толерантности мышления и другие важные навыки. Кроме того, помимо наиболее очевидного решения проблемы, возможно существование и других альтернативных вариантов.

3. *Сопоставление различных интерпретаций одного и того же математического объекта.*

После того, как новая задача была решена, интересно задать вопрос как ученикам, так и себе: "Удалось ли достичь неформального понимания результатов?" Можно ли посмотреть на задачу с другой стороны, использовать другие обозначения, применить полученные результаты в других условиях? Это не только поиск нового способа решения, который может не добавить ничего нового в наше понимание задачи, но и возможность изменить контекст применения результатов.

Для осознания нового внутреннего содержания задачи и расширения ее математического смысла в других категориях могут быть использованы различные интерпретации. Однако, они не всегда очевидны и для их обнаружения необходимы хорошо развитые навыки вариативного мышления и способность переводить задачу на другие языки.

4. *Переструктурирование.*

Изменение структуры уравнений и неравенств при их записи может привести к изменению характера и возникновению различных геометрических образов.

5. *Задачи, требующие для своего решения некоторого «выхода за рамки».*

Для некоторых учащихся может показаться, что поиск неочевидных способов решения математических задач и их интерпретация в разных категориях являются лишь эстетическим вопросом, не имеющим большого практического значения. Однако стоит учитывать, что существуют проблемы, которые невозможно решить в тех категориях, в которых они сформулированы. Для их разрешения необходимо обращаться к другим сферам.

Важными компонентами навыка вариативного восприятия новых задач являются знание различных способов интерпретации математических понятий, умение оценивать их целесообразность и выбирать наилучший способ решения, а также развитые навыки рефлексии и исследования получаемых результатов.

Способы формирования и поддержания учебной мотивации являются важнейшим аспектом любого педагогического процесса и разрабатываемой методики. Как сделать так, чтобы учащиеся были мотивированы решать задачи разными способами, сравнивать их и образовывать устойчивую привычку рассматривать любую задачу или ситуацию с разных сторон, а не по единому шаблону?

Рассмотрим пути достижения данной цели.

1. *Организация групповых занятий учащихся*, в частности командных соревнований.

В такой форме занятий важен не только состязательный момент, но и возможность зарабатывать команде больше очков за решение трудных задач. В обычных условиях учащиеся предпочитают решать простые задачи с использованием проверенных средств, но при групповой работе разные команды могут проверять решения друг друга и оппонировать друг с другом, как в математических состязаниях. Сначала необходимо полностью разобраться в чужом решении, проанализировать, понять его логику и выявить допущенные ошибки. На основе этого действия, формируется навык проверки собственных решений. Регулярная работа в таком формате приводит к тщательному отношению к доказательствам и привычке к самопроверке и самоанализу. Стоит отметить, что этот важный навык самопроверки трудно формируется другими средствами. Чаще всего, при проверке своих решений, учащиеся просто перечитывают их, и, в лучшем случае, могут обнаружить только арифметические ошибки.

2. *Обсуждение одной задачи в классе, при котором каждый из учащихся может рассказать у доски своё решение.*

В процессе обсуждения каждый участник обнаруживает, что есть альтернативные решения, отличные от собственного. Иногда эти решения короче и рациональнее. В этот момент происходит «инсайт», учащийся понимает новое решение и готов использовать его в других ситуациях.

Учителю нужно лишь дать возможность ученикам закрепить новые знания на примерах новых задач.

При этом необходимо ещё разъяснить учащимся, что именно они увидели в новом решении – какие идеи были использованы, обозначить границы их применимости и сделать необходимые обоснования. Другими словами, в ходе подобной работы в классе осуществляются следующие функциональные действия:

- «увидеть» новый подход (инсайт);
- зафиксировать его (с помощью учителя);
- освоить и закрепить на новых задачах;
- проконтролировать себя или других учащихся на предмет обоснованности и полноты решения.

3. *Наличие когнитивного конфликта, проблемной ситуации как средства активизации познавательной деятельности обучающихся*.

Сильные обучающиеся чаще всего проявляют тот аспект, который связан с задачами, не решаемыми имеющимися средствами. Когда учащийся сталкивается с такой задачей, он вынужден рассмотреть ее под другим углом и искать новые методы решения, что приводит к преодолению шаблона. Кроме того, возникает соревновательный эффект, но уже не с другими учащимися, а с самим собой. Для создания такой ситуации учителю необходимо предложить задачи, которые заинтересуют школьников и потребуют выхода за рамки, а затем ненавязчиво руководить процессом их решения.

4. *Рефлексия.*

У Г. П. Щедровицкого находим следующее высказывание: «Рефлексия – это умение видеть все богатство содержания в ретроспекции (то есть обращаясь назад: что я делал?) и немножко в проспекции».

В процессе рассмотрения нескольких интерпретаций одной задачи мы начинаем видеть объекты, фигурирующие в её условии, с их взаимосвязями, что наполняет задачу широким и разнообразным внутренним смыслом. Это определение точно характеризует происходящее. Более того, мы можем произвести обобщения результатов и обнаружить новые закономерности, что поможет лучше осознать смысл выполненных действий. Постоянное формирование психической функции рефлексии и обращение к ней являются неотъемлемыми элементами описываемого подхода.

5. *Функциональная структуризация.*

Умение надлежащим образом структурировать данные новой задачи есть один из залогов её успешного решения. Г. П. Щедровицкий пишет об этом следующее: «Чем отличается тот, кто умеет решать сложные геометрические задачи? Вопрос всегда в том, как решающий увидит исходный материал задачи: то ли как совокупность треугольников, то ли как внутренние рамочные конструкции, или ещё как-то». Решение задач различными способами способствует развитию у обучающихся навыка структуризации данных.

6. *Планирование и самоуправление*.

Ученикам, обладающим способностью к планированию, значительно проще воспринимать новые задачи и ориентироваться в них. Они могут выявлять важные взаимосвязи между элементами и представлять их в удобном формате для дальнейшей работы. Сохраняя разные варианты последовательности действий в своем плане, ученики могут сравнивать их между собой с точки зрения эффективности и возможности достижения желаемого результата.

Учащиеся на уроках постепенно осваивают определенные предметные действия и учатся выстраивать последовательности таких действий, сопоставляя их с точки зрения наибольшей целесообразности. Далее, после получения основных навыков сопоставлений, ученикам предоставляются серии заданий. Для успешного выполнения этих заданий необходимо умение просчитать трудоемкость применения того или иного плана действий в каждом задании и выбрать оптимальный, не углубляясь в детали. Как подчеркнул В. В. Давыдов: «чем больше «шагов» своих действий может предусмотреть ребенок и чем тщательнее он может сопоставить их разные варианты, тем более успешно он будет контролировать фактическое решение задачи...».

При выполнении заданий, которые были подобраны таким образом, чтобы каждая задача требовала нового подхода, возникает необходимость использовать и сравнивать различные методы. В этом случае, использование единого шаблона приводит к нехватке времени на выполнение всех заданий и техническим трудностям, которые могут быть значительными. Однако, такой подход помогает школьникам научиться самоуправлению, осознанно выбирать оптимальный путь решения задачи, даже если он не является очевидным или не подходит данному ученику.

Перечислим ещё ряд общепедагогических функций, присущих описываемым методическим принципам (в силу своего характера они не зависят от конкретного математического материала, на котором реализуются в тот или иной конкретный момент):

- развитие функции самоконтроля;
- формирование навыков варьирования решений, оценки и сопоставления различных подходов;
- развитие привычки к визуальному восприятию математических объектов и использованию геометрических интерпретаций для решения задач.

Таким образом, можем сделать вывод, что весьма распространенным недостатком процесса мышления учащихся является его линейность, то есть отсутствие способности вариативного восприятия окружающих идей и явлений. Это может проявляться в неспособности рассмотреть ситуацию с разных точек зрения и «увидеть» иные способы ее решения. Процесс обучения геометрии предоставляет широкие возможности по преодолению подобных черт мышления. Этой цели может служить множество разных задач при условии регулярного выявления и совместного с учащимися обсуждения их вариативного содержания.

1.3. Дивергентные геометрические задачи как средство развития вариативного мышления

Анализ литературы по проблеме развития вариативного мышления учащихся при обучении математики показал, что в качестве наиболее распространенного средства рассматриваются дивергентные задачи.

Под *дивергентной задачей* будем понимать задачу, «допускающую несколько правильных ответов. Дивергентная задача допускает различные способы своего решения, представления условия в разных формах, может иметь несколько вариантов правильного ответа» (С. М. Крачковский).

Дивергентная математическая задача должна обладать *критериями дивергентности* (по С. М. Крачковскому):

- наличие разных способов решения (при этом важно, чтобы каждый новый способ отличался по своей идее и не был искусственным или неоправданно трудным по сравнению с другими);
- возможность различных трактовок условия или требования задачи, присутствие в них неоднозначности;
- возможность интерпретации представленных в задаче объектов и явлений в нескольких формах, при помощи разных моделей, включения задачи в разный контекст;
- допущение разных, но правильных ответов.

Дивергентные задачи направлены на достижение таких важных целей обучения, как комплексное повторение, систематизация и обобщение учебного материала. Рассмотрим отобранные группы дивергентных задач по геометрии для развития вариативного мышления учащихся.

1. Возможность различных способов изображения геометрических объектов.

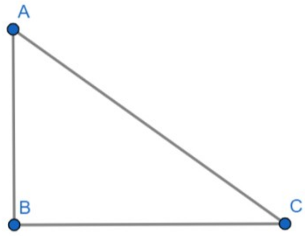
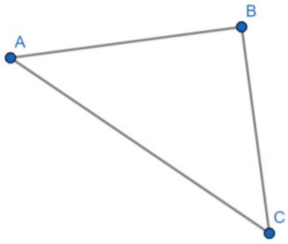
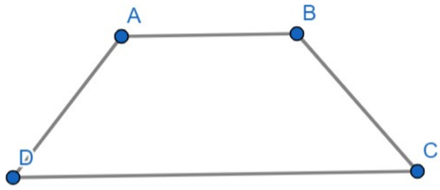
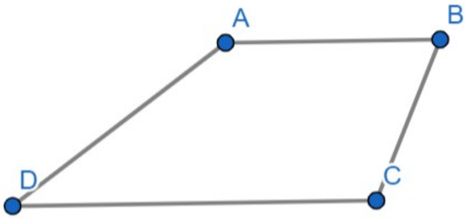
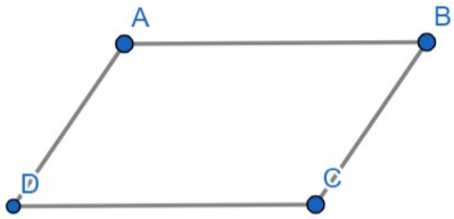
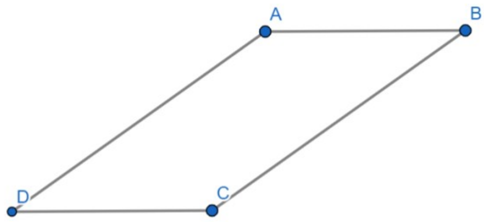
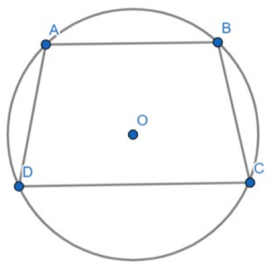
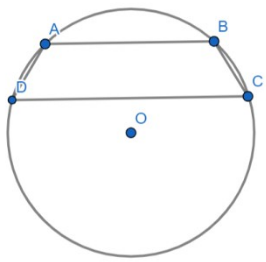
В ходе обучения учащиеся часто привыкают представлять геометрические фигуры в стандартном виде, так, как они изображаются в учебнике или объясняются учителем. Это может привести к ряду проблем:

- учащиеся могут столкнуться с трудностями при решении новых задач, даже если они уже знакомы с объектами и конфигурациями, которые используются в задании, но изображены «нестандартным» образом;
- в задачах, где несколько геометрических конфигураций удовлетворяют условиям, учащимся может быть сложно увидеть все возможные варианты и правильно изобразить их. Часто учащиеся могут найти только один вариант, а остальные вызывают трудности из-за неумения представить заданные объекты и понять, что они могут располагаться иначе, отлично от привычного изображения;
- обучающиеся могут приписывать некоторым геометрическим объектам свойства, которые верны только для их «стандартного» изображения, но неверны в общем случае. Это приводит к развитию «линейного» мышления, которое основано на шаблонах и на поверхностных рассуждениях по конкретной «картинке».

Перечисленные проблемы свидетельствуют о том, что учащиеся привыкают представлять фигуры в «стандартном» виде. Это затрудняет решение задач при изменении конфигурации. В таких случаях учителям следует всегда помнить об этой проблеме и использовать чертежи на доске и доказывать те или иные факты. Кроме того, творческий подход может стимулировать самостоятельное критическое мышление учеников. Например, на уроке можно представить правдоподобное рассуждение на основе выполненного чертежа и попросить учеников подумать о возможных пробелах, допущенных на самом деле. То есть понять, какие выводы получались, именно исходя из особенностей данного чертежа, как можно изобразить описанную в задаче конфигурацию по-другому, как изменятся наши рассуждения в этом случае и будут ли они вообще верными. Рассмотрим примеры некоторых подобных ситуаций (таблица 1).

Таблица 1

Способы изображения основных геометрических объектов

Фигура	Стандартное изображение	Альтернативный вариант изображения
Прямоугольный треугольник		
Трапеция		
Параллелограм м		
Вписанная трапеция		

2. *Решение задачи осуществляется за счет «перефокусировки взгляда» при работе с чертежом.*

В работе с готовым чертежом часто возникает проблема из-за большого количества линий, образующих множество фигур. Обучающиеся не знают, какую конфигурацию выбрать, чтобы решить задачу. Они часто работают с чертежом "в одном масштабе", то есть рассматривают либо всю картину в целом, либо упорно работают с самыми мелкими элементами чертежа. Это приводит к распространенной проблеме в обучении.

Важно научиться распознавать стандартные конфигурации фигур, которые могут быть расположены в необычным образом, например, перевернутыми. Для этого ученикам нужно иметь достаточный опыт, чтобы выделять эти стандартные конфигурации и менять масштаб взгляда на чертеж, чтобы замечать новые связи между элементами и использовать их для решения задач. Учителям следует обратить внимание учеников на необходимость рассматривать чертеж «свежим взглядом», выделяя различные составные части и не «зацикливаться» только на одних элементах. Это помогает развивать качества мышления, такие как способность удержания в памяти разных масштабов изображения и совместное оперирование ими.

Приведем пример задания для развития навыка «переключения взгляда» учащихся.

Пример 1. Найдите площадь четырехугольника $PQRS$, если $AM:MN:BN=BL:LK:CK=3:2:1$ *и* $S\,ABC=q$.

Для решения задачи необходимо вначале вычислить отношения $CS:SP:PM$ *и* $CR:RQ:QN$ ¿), что можно сделать, например, несколько раз применив теорему Менелая. При этом каждый раз мысленно выделяем некоторый треугольник и пересекающую его прямую, затем переходим к следующей такой паре «треугольник - прямая» и т. д. Итак, происходит «переключение взгляда» учащихся и поочередное «высвечивание» определенных конфигураций (для которых можно применять теорему Менелая) на имеющемся чертеже.

3. Использование опорных «картинок» и конфигураций.

Чем больше конфигураций и фактов учащиеся знают, тем выше вероятность решения задачи, если они увидят знакомую конфигурацию на чертеже. Для запоминания этих конфигураций лучше использовать картинки, так как зрительная память активируется при решении задач и учащийся может увидеть знакомое изображение.

В дальнейшем при построении своего чертежа, учащийся вспоминает уже знакомые факты и идеи, и применяет их при решении. Это приводит к узнаванию зрительных образов, которые позволяют воспринимать задачу иначе. Установка на запоминание и использование опорных конфигураций делает процесс решения задач более продуктивным.

Для эффективного решения новых задач рекомендуется выделить и запомнить ключевые моменты, такие как использованные дополнительные построения и выявленные особенности предложенной конфигурации. Это поможет обучающимся расширить свою собственную систему опорных фактов и «картинок», а также развить зрительную память. Метод интериоризации позволяет получить новый оригинальный результат, который запоминается в качестве «стандартного». Такая организация работы является удачным примером реализации системно-деятельностного подхода в обучении.

4. *Решение задачи связано с дополнительными построениями и преобразованиями заданной конфигурации.*

При решении геометрических задач часто возникает необходимость в дополнительных построениях. Они могут существенно изменить восприятие задачи и включить ее в новый контекст. Любое дополнительное построение может существенно изменить ее визуальное. При этом объекты, которые были на чертеже до этого момента, становятся частью более общей картины. Одним из распространенных приемов, который значительно меняет восприятие геометрической конфигурации, является введение вспомогательной окружности.

Вспомогательная окружность является важным инструментом в решении различных геометрических задач, где окружности не использовались в условии. Введение окружности приводит к новым, зачастую неожиданным выводам, которые могут эффективно применяться для решения задачи.

Вспомогательная окружность - это эффективный инструмент, который позволяет изменить визуальное восприятие геометрической конфигурации. Ее использование в решении задач может быть немного неожиданным, но всегда впечатляющим. Перед тем, как приступать к решению задачи, стоит обдумать, какие дополнительные построения могут помочь в решении, включить задачу в новый контекст и сделать ее более понятной.

5. *Задача, допускает несколько способов решения, существенно различающихся по своей идее.*

Среди всех трудностей, с которыми сталкиваются учащиеся, одной из наиболее распространенных является невозможность предугадать возможные варианты решения задач. Это связано с тем, что для успешного решения геометрических задач необходимо иметь определенную базу знаний и умение выделять на чертеже ключевые элементы, базовые конфигурации.

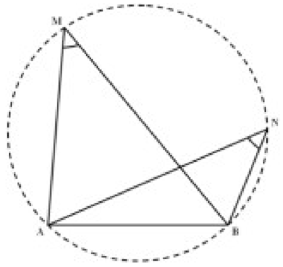
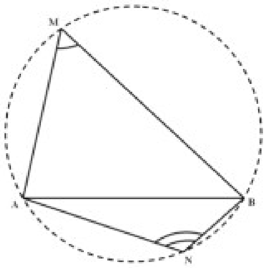
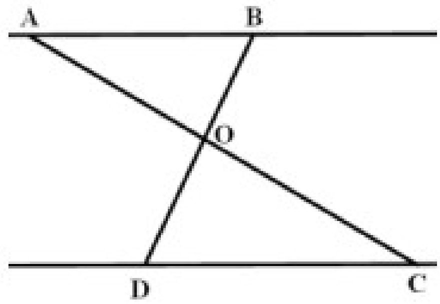
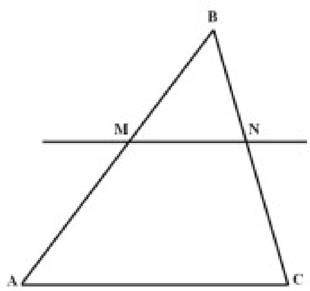
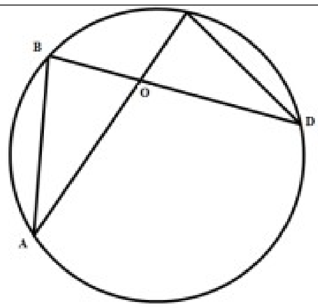
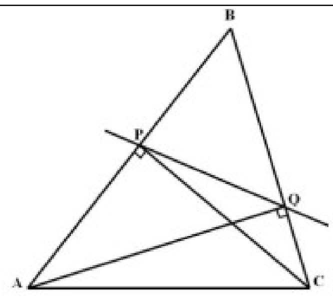
Чтобы развить эту способность, необходимо решать множество задач схожего типа. Однако, объем решенных задач не является единственным фактором, оказывающим влияние на умение «видеть» построения. Важную роль также играет способность находить опорные, базовые конфигурации и использовать их в качестве основы для решения более сложных задач.

С.М. Крачковский предлагает ряд стандартных конфигураций, знание которых позволяет значительно быстрее обнаруживать их в разных задачах, а также проводить дополнительные построения, приводящие к их возникновению (таблица 2).

Таблица 2

Основные конфигурации геометрических объектов

Описание конфигурации	**Визуальный образ**

«Одинаковые взгляды на мир» Отрезок AB виден под одинаковыми углами из точек M и N, находящихся по одну сторону от прямой AB. В частности, если углы M и N - прямые, то AB - диаметр проводимой окружности.	
«Взаимодополняющие взгляды на мир» Отрезок AB виден из точек M и N, находящихся по разные стороны от прямой AB, под углами, сумма которых равна $180°$. Если оба этих угла - прямые, то AB – диаметр.	
«Песочные часы», или «бантик» Если прямые AB и CD параллельны, то треугольники ABO и CDO подобны.	
Подобие «параллельным отсечением» Прямая, пересекающая две стороны треугольника и параллельная третьей стороне, отсекает треугольник, подобный исходному.	
«Бабочка» Две пересекающиеся в точке O хорды AC и BD окружности образуют два подобных треугольника ABO и CDO.	
«Непараллельное» отсечение треугольника Если AQ и CP – высоты треугольника ABC, то треугольники ABC и QBP подобны с коэффициентом подобия $\|\cos\angle B\|$.	

6. *Наличие неоднозначности в условии задачи.*

Рассмотрим еще один важный тип дивергентных геометрических задач. В этих задачах присутствует неоднозначность, которая требует рассмотрения нескольких конфигураций для удовлетворения условию. Однако, постоянное предложение таких задач помогает учащимся обнаруживать, что условие не определяет конфигурацию однозначно. Таким образом, нетривиальность и неожиданность этого факта исчезают, а поиск второго случая входит в привычку и становится в большей степени техническим моментом.

Дивергентные задачи могут использоваться как для классных работ, так и для самостоятельного решения. Нередко они встречаются в разных разделах геометрии. Учащиеся не должны знать заранее, что следующая задача будет многовариантной и сколько случаев необходимо рассмотреть для получения исчерпывающего ответа. Сначала они должны попытаться понять это сами. Использование в полной мере дидактической ценности дивергентных задач зависит от выполнения перечисленных условий, которые представляются одним из важнейших факторов.

7. *Задачи на разрезание.*

Многие задачи на разрезание являются дивергентными по своей сути, допуская несколько совсем разных вариантов решения. Примеры данного типа задач будут продемонстрированы в данной работе позднее.

Таким образом, были выделены основные типы дивергентных геометрических задач, направленных на развитие вариативного мышления обучающихся.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СПОСОБСТВУЮЩИХ РАЗВИТИЮ ВАРИАТИВНОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ 7-9 КЛАССОВ

2.1. Комплект геометрических задач, способствующих развитию вариативного мышления учащихся 7-9 классов

Вариативное мышление предполагает способность к идентификации и генерации различных вариантов решения задачи. Определим критерии задач, направленных на развитие вариативного мышления.

1. Неоднозначность задачи. Задача должна иметь несколько возможных способов решения, при этом каждое решение может быть правильным и уникальным.
2. Открытость задачи. Задача должна предоставлять возможность для творческого мышления и экспериментирования, а также для поиска новых подходов и методов.
3. Проблемность задачи. Задача должна вызывать интерес и стимулировать учеников на поиск новых решений.
4. Многомерность задачи. Задача должна содержать параметры или условия, которые могут быть изменены для получения разных ответов.
5. Оригинальность задачи. Задача должна быть уникальной и не иметь стандартных решений.

Основываясь на приведенных ранее характеристиках дивергентных задач, сформулируем *требования* к ним, чтобы задачи были направлены на развитие вариативного мышления обучающихся.

Первое требование - задача должна иметь несколько возможных способов решения. Это помогает стимулировать творческое мышление и поиск альтернативных подходов к решению задачи.

Второе требование - задача должна содержать нестандартные условия или данные, которые выходят за рамки обычной практики. Такие условия могут вызвать интерес и желание найти новые пути решения.

Третье требование - задача должна иметь открытую структуру, то есть необходимость самостоятельно выбирать метод и порядок выполнения шагов для получения результата. Это поможет развить навыки самостоятельности и ответственности за результат.

Четвертое требование - дивергентная задача должна быть интересной для того, чтобы обучающиеся чувствовали себя мотивированными на её решение.

Проиллюстрируем взаимосвязь критерий вариативной задачи и требований, предъявляемых к дивергентной геометрической задаче.

Таким образом, дивергентные геометрические задачи представляют собой один из методов развития вариативного мышления. Важно понимать, что такие задачи должны быть специально разработаны для достижения этой цели. Все эти требования вместе помогают создать задачу, которая стимулирует вариативное мышление и развивает умения решать задачи нестандартным способом.

В школьных учебниках задачи играют основополагающую роль в обучении учеников геометрии. Однако, часто стандартные задачи не позволяют ученикам развивать свой творческий потенциал и мышление. Именно поэтому возникает необходимость выделения дивергентных геометрических задач.

Одной из целей рассмотрения школьных учебников с целью выделения дивергентных геометрических задач является развитие умений учеников в области решения нетипичных заданий. Для достижения данной цели ученикам необходимо умение «видеть» различные способы решения стандартных геометрических задач. Также это позволяет расширить представления о геометрии и её применении в жизни.

Другой целью является создание условий для развития техники самостоятельного решения задач. Ученики, которые умеют самостоятельно решать нетипичные задачи в геометрии, смогут проявить свой творческий потенциал и в других областях знаний.

Школьные учебники являются важным инструментом в обучении геометрии. В них содержится большое количество задач и примеров, которые помогают ученикам лучше понимать материал и развивать свои навыки решения геометрических задач.

Проведем анализ школьных учебников с целью выделения в них дивергентных задач. Такой анализ позволит определить, какие из задач соответствуют предложенным ранее типам дивергентных геометрических задач и могут быть использованы для формирования вариативного мышления школьников.

Результаты анализа представим в таблице (Таблица 3), где отразим количество задач, соответствующих выбранному типу, в школьных учебниках геометрии для 7-9 классов.

Таблица 3

Результаты анализа учебников

Учебник Тип дивергентных математических задач	1 Шарыгин И.Ф., Геометрия, 7-9 кл.	2 Атанасян Л.С., Геометрия, 7-9 кл.	3 Мерзляк А.Г., Геометрия, 7, 8, 9, 9 (углубл.) кл.
Задачи с возможностью различных способов изображения геометрических объектов	1	1	2
Задачи, в которых необходимы дополнительные построения и преобразования	8	6	12
Задачи на разрезание фигур	0	0	0
Задачи с неоднозначностью в условии	3	5	5
Задачи, решаемые с помощью «перефокусировки» взгляда	0	1	6

1. Шарыгин И. Ф., Геометрия. 7-9 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений.

2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С.Б. и др., Геометрия. 7-9 кл.: учебник для общеобразовательных организаций.

3. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., Геометрия: Учебник для 7 класса.

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., Геометрия: Учебник для 8 класса.

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С., Геометрия: Учебник для 9 класса.

Мерзляк А. Г., Поляков В. М., Геометрия: Учебник для 9 класса: Углубленный уровень.

По результатам анализа школьных учебников можем сделать вывод, что дивергентных геометрических задач, направленных на развитие вариативного мышления, в школьном курсе категорически не хватает, в связи с этим возникает необходимость в разработке комплекта задач.

Составим комплект дивергентных задач, способствующих формированию вариативного мышления по теме «Четырехугольники».

Комплект задач по теме «Четырехугольники»

Задачи с возможностью различных способов изображения геометрических объектов.

Задание. Построить заданную фигуру различными способами, рассмотреть различные возможные конфигурации.

Задача 1. Вычислить периметр трапеции, боковые стороны которой 25 и 17, высота 15, а одно из оснований равно 12.

Решение.

<u>*Первый случай.*</u> Построим трапецию таким образом, чтобы высота, опущенная на нижнее основание, оказалась внутри трапеции.

Рассмотрим треугольник CHD- прямоугольный. Тогда $DH=\sqrt{17^2-15^2}=8$. Опустим высоту BN. Из прямоугольного треугольника BNA найдем длину

$AN=\sqrt{25^2-15^2}=20$. $NH=BC=12$. Тогда длина AD состоит из сумм длин отрезков $AD=AN+NH+ND=20+12+8=40$. Найдем периметр трапеции. $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=25+12+17+40=94$.

<u>*Второй случай.*</u> Рассмотрим ситуацию, когда хотя бы одна из высот падает на продолжение нижнего основания трапеции.

Рассмотрим $NBCH$- прямоугольник, тогда $NH=12$. Ранее были найдены значения $AN=20, HD=8$. Тогда значение стороны AD можно представить в виде выражения $AD=AN+NH-HD=20+12-8=24$. Искомый периметр равен $P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD=25+12+17+24=78$.

Ответ: 94 или 78.

Задача 2. В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB=27, CD=28$, верхнее основание $BC=5$. Известно, что $\cos\angle BCD=\frac{-2}{7}$. Найти AC.

Решение. Задача имеет 2 способа решения в зависимости от построения.

<u>*Первый способ.*</u> Трапеция построена таким образом, что обе высоты, опущенные на нижнее основание, попадают во внутреннюю часть трапеции.

Тогда искомая диагональ $AC=28$.

<u>*Второй способ.*</u> Одна или две высоты, опущенные нижнее основание, попадают на его продолжение.

Тогда искомая диагональ $AC=2\sqrt{181}$.

Ответ: 28 и $2\sqrt{181}$.

Задачи, в которых необходимы дополнительные построения и преобразования.

Задание. Решить задачи, не используя формулу площади трапеции.

Задача 3. Дана трапеция $ABCD$. Найти ее площадь.

Решение.

<u>*Первый способ.*</u> Опустим высоты из вершин верхнего основания, тогда заданную трапецию можем рассмотреть как прямоугольник ABH_2H_1 и два прямоугольных треугольника AH_1D и BH_2C.

В таком случае нахождение площади трапеции сводится к нахождению суммы площадей трех получившихся фигур. $S_{AH_1D}=\frac{6\cdot 2}{2}=6, S_{ABH_2H_1}=6\cdot 2=12, S_{BH_2C}=\frac{6\cdot 6}{2}=18$. Тогда площадь искомой трапеции $S=6+12+18=36$.

<u>*Второй способ.*</u> Для решений задачи необходимо внести дополнительные построения. Дополним заданную трапецию до прямоугольника.

Тогда нахождение площади искомой трапеции сводится к нахождению площади прямоугольника за исключением двух «лишних» прямоугольных треугольников DEA и BFC. $S_{DEFC}=6\cdot 10=60, S_{DEA}=\frac{6\cdot 2}{2}=6, S_{SFC}=\frac{6\cdot 6}{2}=18$. Таким образом, площадь искомой трапеции $S=60-(6+18)=36$.

Также при решении данной задачи необходимо рассмотреть случаи, когда одна или две высоты трапеции падают на продолжение нижнего основания.

Тогда решение задачи сводится к дополнению данной фигуры до прямоугольника, площадь искомой трапеции будет найдена как $S_{ABCD}=S_{AECH_2}-S_{EAD}-S_{CH_2D}$.

Задача 4. Найти площадь трапеции с основаниями 20 см, 40 см и боковыми сторонами 16 см, 12 см.

Решение.

Проведем $CM \parallel AB$. Тогда $AM=20\,см$ (т.к. $ABCM$ параллелограмм), следовательно, $MD=20, BM=16$ (из параллелограмма $MBCD$). Получим три равных прямоугольных треугольника: $\triangle ABM=\triangle BMC=\triangle MCD$. Тогда нахождение площади трапеции сводится к нахождению утроенной площади одного из треугольников.

$$S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 16=96,$$

$$S_{ABCD}=3\cdot S_{ABM}=96\cdot 3=288.$$

Задача 5. В трапеции $ABCD$ Диагонали $AC\, и\, BD$ взаимно перпендикулярны. Причем, $AC=6, BD=8$. Найти среднюю линию трапеции.

Решение. В данной задаче необходимо выполнить дополнительное построение. Через точку C параллельно BD провести прямую до пересечения с нижним основанием трапеции.

Тогда получим прямоугольный треугольник ACK, гипотенуза которого $AK=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

С другой стороны, $AK=AD+DK$, где $DK=BC=¿\, AK=AD+BC$.

Средняя линия равна полусумме оснований, то есть $\frac{AK}{2}=5$.

Ответ: 5

Задачи на разрезание фигур.

Задание. Предложить хотя бы 2 способа решения задачи. Доказать.

Задача 6. Разделить произвольную трапецию на две равновеликие части.

Решение.

<u>*Первый способ.*</u> Построим произвольную трапецию $ABCD$. Пусть основания трапеции равны $a\, и\, b$, причем $a<b$, а точки $M\, и\, N$ середины сторон $BC\, и\, AD$ соответственно. Построим отрезок MN. Тогда данная трапеция делится на две: $ABMN\, и\, NMCD$.

Докажем, что они равновеликие, то есть площади трапеций равны. Так как точка M- середина отрезка BC, то $BM=MC=\frac{a}{2}$. Аналогично для стороны $AD: AN=ND=\frac{b}{2}$. Опустим высоты $BH_1\, и\, CH_2$. Так как получившиеся высоты равны, то введем обозначение h. Тогда

$$\left.\begin{aligned} S_{ABMN}&=\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}{2}\cdot h \\ S_{NMCD}&=\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}}{2}\cdot h \end{aligned}\right\} =¿\, S_{ABMN}=S_{NMCD}$$

ч.т.д.

<u>*Второй способ.*</u> Для решения воспользуемся свойством.

Свойство. Если трапеция разделена прямой, параллельной ее основаниям, равным $a\,и\,b$ на две равновеликие трапеции. Тогда отрезок k этой прямой, заключенной между боковыми сторонами этой трапеции равен

$$k=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

Тогда решение задачи сводится к построению отрезка параллельного основаниям трапеции длиной k.

Задача 7. На рисунках изображены примеры разрезания трапеции. Выберите один из предложенных вариантов и докажите, что данный способ разрезания делит трапецию на две равновеликие части.

В таком виде условие неопределенно и ему удовлетворяет множество самых разнообразных способов разрезания, например такой, как на рисунке. Здесь точка E – середина диагонали BD. Легко доказать, что в этом случае площади четырехугольников $ABCE$ и $ADCE$ равны.

Если потребовать, чтобы разрезание происходило по одной прямой линии, то множество возможных решений сузится, но все равно останется необозримым. Еще более конкретизируя условие, можно сделать решение даже однозначным. Например, потребовать, чтобы линия разреза была параллельна основаниям трапеции. Возникающий при этом отрезок характеризуется тем, что его длина есть среднее квадратичное длин оснований трапеции. На рисунке показано разрезание трапеции на две равновеликие части $ABCF\,и\,AFD$ по прямой, проходящей через вершину A. Отрезок EF проходит через середину E диагонали BD и параллелен диагонали AC.

Задача 8. Разделить параллелограмм на три равновеликие части.

Решение.

<u>*Первый способ.*</u> Разделим параллелограмм на три равновеликие части прямой, проходящей через одну из вершин.

Второй способ. Разделим нижнее основание на три равных части прямыми, проходящими через вершину верхнего основания, и аналогично разделим верхнее основание.

Третий способ. Разделим трапецию на три части прямыми, параллельными боковым сторонам, проходящими через точки, делящие основания на три равных части.

Задачи с неоднозначностью в условии.

Задание. Решить задачу, рассмотрев все возможные случаи.

Задача 9. В описанной около окружности равнобокой трапеции основания относятся как 3:5. Из вершины меньшего основания опущена высота на большее основание, точка H - основание высоты. Из точки H опущен перпендикуляр HE на боковую сторону трапеции. В каком отношении точка E делит боковую сторону трапеции?

Решение.

Первый случай. Пусть перпендикуляр опущен на сторону CD. Обозначим за x одну часть, тогда $BC=3x, AD=5x$. Так как трапеция описана около четырехугольника, то можем воспользоваться свойством.

Свойство. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих сторон равны.

Тогда $AD+BC=AB+CD=¿AB+CD=8x$, а так как трапеция равнобедренная, то $CD=4x$. Проведем через середины оснований отрезок MN и построим перпендикуляр $OQ\ к\ стороне\ CD$. Тогда $BM=MC=CQ=1{,}5x, QD=ND=2{,}5x$, $HD=x$. $⊿HED\quad ⊿COD, \frac{HD}{CD}=\frac{ED}{HD}=¿ED=\frac{HD^2}{CD}$

$$ED=\frac{x^2}{4x}=\frac{x}{4}=¿CE=4x-\frac{x}{4}=\frac{15x}{4}=¿\frac{ED}{CE}=\frac{x}{4}\cdot\frac{4}{15x}=\frac{1}{15}.$$

Второй случай. Пусть перпендикуляр опущен на сторону AB.

Тогда опустим перпендикуляр из вершины B на нижнее основание.

$AH=4x, AB=4x, \angle A-общий, \Delta ABN, \Delta AEH-прямоуг.=¿\Delta AEH=\Delta ABN$ (по гипотенузе и острому углу).

Следовательно, $AE = AN = x = ¿ EB = 3x = ¿ \frac{AE}{EB} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{1}{15}, \frac{1}{3}$.

Задача 10. Дана трапеция $ABCD$, основание которой $BC = 44, AD = 100$, $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых $AD и AC$ касается стороны CDв точке K. Найдите длину отрезка CK.

Решение.

<u>*Первый способ.* </u>Пусть окружность заключена внутри трапеции.

Найдем длину отрезка HD. Так как трапеция равнобедренная (по условию), то $HD = \frac{100-44}{2} = 28$, тогда $AH = 100 - 28 = 72$.

$$CK = \frac{CD + AC - AD}{2}$$

Рассмотрим ΔCHD – прямоугольный $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2 = ¿ \sqrt{35^2 - 28^2} = 2¿}$. Рассмотрим $\Delta CHA - прямоугольный$. $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{21^2 + 72^2} = 75$.

<u>*Второй способ.* </u>Пусть окружность касается трапецию внешним образом.

$$CK = \frac{CD + AD - AC}{2} = \frac{35 + 100 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

Задача 11. Точка M делит диагональ BD параллелограмма $ABCD$ в отношении 1:2. Найти площадь параллелограмма, если площадь четырехугольника $ABCM = 60$.

Решение. Задача может быть решена двумя способами в зависимости от расположения точки M. В случае, когда $BM : MD = 1 : 2$, то площадь искомого параллелограмма равна 180.

Если же $MD : BM = 1 : 2$, то площадь такого параллелограмма рана 90.

Ответ: 180 или 90.

Задача 12. Боковые стороны $KL и MN$ трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые $KL \, и \, MN$ пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение. Данная задача может иметь 2 различных варианта решений в зависимости от выбранных значений оснований. Рассмотрим оба случая на чертежах и.

Получаем два отличных друг от друга ответа. В первом случае $r=5$, во втором случае $r=2$.

Ответ: 5 или 2.

Задача 13. Боковая сторона трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол $60°$. Основания трапеции равны 16 и 40. Найти длину отрезка соединяющего середины оснований.

Решение. Задача два возможных способа решения в зависимости от выбранного угла в $60°$.

Первый способ. В случае, если выбран $\angle A=60°$, то длина искомого отрезка равна 12.

Второй способ. В случае, если выбран $\angle B=60°$, то длина искомого отрезка равна $12\sqrt{3}$.

Ответ: 12 и $12\sqrt{3}$.

Задачи, решаемые с помощью «перефокусировки» взгляда.

Задание. Решить задачу, определить количество пар подобных и равных треугольников, на которые можно разделить данную трапецию диагоналями.

Задача 14. Диагонали AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь трапеции, если площадь треугольника AEB равна 9, а точка Е делит диагонали в отношении 1:3.

Решение. $\Delta AEB=\Delta CED$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно $S_{CED}=S_{AEB}=9$.

Опустим перпендикуляры $BN \, на \, AC$ и $BH \, на \, AD$.

Рассмотрим $\Delta AEB u \Delta BEC$. BN - общая высота, $\frac{BE}{AE}=\frac{1}{3}=¿$ треугольники подобны с коэффициентом подобия $k=3=¿ S_{BEC}=\frac{1}{3}S_{AEB}=3$.

$\Delta AE B$ ΔBEC (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними) $\frac{S_{BEC}}{S_{AED}}=k^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=¿ S_{AED}=9 S_{SEC}=27$.

Таким образом, площадь искомой трапеции состоит из сумм площадей треугольников AEB, AED, BEC, BED. $S_{ABCD}=9+9+3+27=48$.

Ответ: 30

Данная задача может иметь ответы, отличные от полученного, при ином обозначении трапеции.

Задача 15. На сторонах параллелограмма $ABCD$ взяты точки $M, N, P u Q$. Прямые $MN u PQ$ продлены до пересечения с продолжениями сторон параллелограмма. Сколько пар подобных треугольников Вы можете указать на рисунке?

Задав конкретные численные отношения, в которых точки $M, N, P u Q$ делят стороны параллелограмма, из этой задачи можно составить целый ряд конкретных и содержательных задач, для решения которых как раз будет нужно рассмотрение разных пар подобных треугольников. Например, можно предложить учащимся найти отношения $MO:ON$ и $PO:OQ$, где O – точка пересечения$MN u PQ$.

Можно предложить учащимся найти, какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырехугольника $ONCQ$.

2.2. Рекомендации по применению разработанного комплекта задач

Ранее были выделены требования к дивергентным задачам, направленным на развитие вариативного мышления обучающихся. Рассмотрим, насколько разработанные задачи соответствуют приведенным требованиям. Результаты проиллюстрируем в таблице (Таблица 4).

Таблица 4

Анализ соответствия задач требованиям

Требования / Задачи	1.Задача должна иметь несколько возможных решений.	2.Задача должна содержать нестандартные условия или данные, которые выходят за рамки обычной практики.	3.Задача должна иметь открытую структуру, то есть необходимость самостоятельно выбирать метод и порядок выполнения шагов для получения результата.	4. Задача должна быть интересной и увлекательной для того, чтобы обучающиеся чувствовали себя мотивированными на её решение
Задача 1	+	+	+	+
Задача 2	+	+	+	+
Задача 3	+	+	+	-
Задача 4	+	+	+	+
Задача 5	+	+	+	-
Задача 6	+	+	+	+
Задача 7	+	+	+	+
Задача 8	+	+	+	+
Задача 9	+	+	+	+
Задача 10	+	+	+	+
Задача 11	+	-	+	+
Задача 12	+	+	+	-
Задача 13	+	+	+	+
Задача 14	+	+	+	+
Задача 15	+	+	+	+

Таким образом, можем заключить, что задачи соответствуют основным требованиям, предъявляемым к ним, а значит, могут быть использованы как инструмент развития вариативного мышления.

Современное образование требует от учителей не только умения давать знания, но и развивать у учащихся различные виды мышления и творческие способности. Ранее было доказано, что эффективным методом развития вариативного мышления обучающихся является использование дивергентных задач в курсе геометрии, которые помогают научиться анализировать, рассуждать и находить нестандартные решения. Анализ школьных учебников показал, что количество таких задач в учебниках геометрии 7-9 классов критически мало. Поэтому, для того чтобы учителя могли более успешно формировать вариативное мышление обучающихся, был разработан комплект дивергентных геометрических задач. Приведем методические рекомендации по использованию данного комплекта, которые помогут преподавателям создавать интересные и познавательные уроки для своих учеников.

Содержание разработанного комплекта задач разделено по группам, в зависимости от типа заданий, однако это не означает, что комплект следует предлагать учащимся для последовательного решения. Задачи могут быть переструктурированы в зависимости от потребностей учителя, либо использоваться фрагментарно.

Не смотря на то, что возрастные особенности обучающихся 7-9 классов подразумевают формирование умений анализировать, сравнивать, критически подходить к рассмотрению каких-либо вопросов, при использовании данного комплекта в рамках основного курса геометрии следует использовать дифференцированный подход и предлагать для решения представленные задачи обучающимся с достаточным и высоким уровнями обученности. Достаточно эффективно разработанный комплект задач может быть применим в рамках элективного курса. Также элементы комплекта могут применяться в качестве индивидуальных домашних заданий для учеников с высоким уровнем обученности.

Для решения дивергентных геометрических задач необходимо использование различных методов и подходов. Целесообразно предлагать обучающимся задачи из представленного комплекта «нестандартно», например, проводить на уроках мозговой штурм или другие игры и упражнения, развивающие творческие способности обучающихся.

Еще одной важной особенностью учащихся данной возрастной категории является направленность на общение со сверстниками. В связи с этим, можно предлагать задачи из разработанного комплекта для решения в качестве групповой или парной работы. В таком случае, обучающиеся будут иметь возможность развивать навык коммуникации, отстаивать свою точку зрения, а также обмениваться опытом и знаниями.

Педагог должен следить за процессом работы каждого учащегося, давая индивидуальные рекомендации и подсказки при возникновении затруднений. Также важно проводить анализ ошибок после выполнения заданий, чтобы обучающиеся могли проанализировать свои ошибки и не допускать их в будущем.

Таким образом, использование разработанного комплекта дивергентных геометрических задач может значительно повысить интерес к изучению геометрии и помочь развить вариативное мышление учащихся.

В параграфе 1.2 были предложены методы формирования вариативного мышления обучающихся. Рассмотрим возможность применение этих методов в условиях работы с разработанным комплектом задач.

1. *Организация групповой работы.*

Эффективное применение разработанного комплекта задач на уроках геометрии возможно и в форме групповой работы. Групповая работа позволяет ученикам обмениваться мнениями, делиться своим опытом и знаниями, а также развивать навыки коммуникации.

Применять разработанный комплект задач в формате групповой работе можно несколькими способами.

Способ 1. Комплект разделен по группам в зависимости от типа задач, для каждой группы предложено несколько задач, поэтому возможно для групп обучающихся из задач комплекта составить отдельные наборы задач таким образом, чтобы в каждом наборе содержалось по одной задаче каждого выделенного типа. Таким образом, получим несколько вариантов наборов задач, каждый из которых может быть предложен для решения сформированной группе обучающихся.

Способ 2. Сформировать фиксированные группы обучающихся и предложить для решения каждой группе определенный тип задач из разработанного комплекта на конкретном занятии. В последующем предлагать группе задачи другого типа, пока каждая группа не справится с решением всего комплекта задач.

Стоит отметить, что данный формат работы сложно образовать в рамкам школьного урока, но может применяться на элективных курсах.

При организации групповой работы следует учитывать следующие рекомендации:

1. Формирование групп. Группы следует формировать таким образом, чтобы в состав каждой из них входили обучающиеся разного уровня подготовки.

2. Определение целей и задач для каждой группы. Цели и задачи должны быть четко сформулированы и соответствовать возможностям каждой группы. Группа может иметь свои цели и задачи в случае, если занятие организовано таким образом, что каждая группа на данном занятии решает определенный тип задач. Либо, если группе предоставлен набор, состоящий из задач разных типов, то перед началом работы с задачами стоит сформировать общие цели и задачи для всего класса.

3. Организация работы внутри группы. Внутри каждой группы необходимо определить роли и задачи для каждого участника. Каждый участник должен иметь возможность высказаться и принять участие в обсуждении.

4. Обобщение результатов работы каждой группы. После завершения работы каждая группа должна представить свои результаты перед всем классом.

5. Оценка работы каждой группы. Оценка должна быть объективной и учитывать как индивидуальный вклад каждого участника, так и работу группы в целом.

Такой подход поможет стимулировать коммуникацию в классе, развить логическое мышление и формирование уверенности в своих знаниях. Кроме того, это позволит учителю оценить эффективность разработанных им задач и внести необходимые коррективы в методику преподавания. Важно также отметить, что при обсуждении решений следует поощрять аргументированные дискуссии среди учащихся. Это поможет им лучше понимать материал и развивать критическое мышление.

2. *Организация проблемной ситуации для развития познавательного интереса к задаче.*

Одним из важных аспектов использования разработанного комплекта задач на уроках геометрии является организация проблемной ситуации, которая вызывает у учеников познавательный интерес. Для этого следует учесть некоторые рекомендации:

1. Начать урок стоит с краткого повествования о реальной жизненной ситуации, связанной с темой задачи. Это поможет ученикам лучше понять целесообразность и важность решения данной задачи.

2. Использовать картинки или видео для демонстрации проблемы, которую нужно решить. Это может быть как абстрактная геометрическая фигура, так и объект из окружающей жизни.

3. Предложить ученикам поиграть в игру-головоломку или провести маленький конкурс, связанный с темой задачи. Это поможет не только вызвать интерес к заданию, но и подготовит учеников к его выполнению.

4. Создать условия для обсуждения задачи в группах или парах. Обмен мнениями и опытом поможет стимулировать мышление и повысить эффективность решения задачи.

Важно помнить, что организация проблемной ситуации достаточно сложная задача. Необходимо подбирать индивидуальные подходы к ученикам, чтобы вызвать у них интерес к заданию и максимально эффективно использовать разработанные задачи на уроках геометрии.

3. *Рефлексия.*

Одним из важных этапов при работе с задачами на уроках геометрии является рефлексия. После того, как ученики решат предложенный комплект задач, необходимо провести анализ их работы.

В ходе рефлексии можно обратить внимание на следующие моменты:

- какие ошибки допустили ученики при решении задач;
- какие возникли затруднения;
- как происходило взаимодействие учеников друг с другом и с учителем;
- были ли использованы различные методы и подходы к решению задач.

На основании полученных данных можно определить, какие темы нужно ещё раз повторить или закрепить. Также преподаватель может предложить дополнительные задачи для самостоятельного решения.

Результатом успешной рефлексии является повышение мотивации обучающихся к дальнейшему изучению геометрии. Ведь они видят свой прогресс и понимают, что способны на большее.

Таким образом, использование разработанного комплекта дивергентных геометрических задач может значительно повысить интерес к изучению геометрии и помочь развить вариативное мышление учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном процессе в 7-9 классах применение дивергентных задач по геометрии может стать отличной возможностью для углубления знаний и развития качеств вариативного мышления. Например, использование таких задач может помочь ученикам научиться решать нестандартные задачи и применять математические знания в практических ситуациях.

В ходе проведенного теоретического исследования получены следующие результаты и выводы.

1. Анализ психолого-педагогической литературы и Интернет-ресурсов позволил выделить сущность понятия «вариативное мышление», рассмотреть его основные виды и принципы.
2. Рассмотренные методические приемы развития вариативного мышления позволили прийти к выводу, что для его развития эффективно использование дивергентных задач.
3. Выделены особенности дивергентных геометрических задач, задачи были структурированы по группам.
4. Разработаны требования к дивергентным геометрическим задачам, которые напрямую связаны с критериями вариативного мышления.
5. Составлен комплект геометрических задач, способствующих развитию вариативного мышления учащихся 7-9 классов.

В целом, применение дивергентных задач в учебном процессе может быть полезным и эффективным инструментом для развития математических навыков и мышления учеников.