УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Б. А. Русанов, В. Е. Сидоров

Обработка результатов измерений в лабораторном физическом практикуме

Учебное пособие

для самостоятельной работы студентов

Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»

Б. А. Русанов, В. Е. Сидоров

Обработка результатов измерений в лабораторном физическом практикуме

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Екатеринбург 2023

УДК 378.016:53(075.8)
ББК В3я7
Р89

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уральский государственный педагогический университет» в качестве *учебного* издания (Решение № 24 от 28.02.2023)

Рецензенты:

А. А. Повзнер, д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой физики Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина

А. Д. Ивлиев, д-р физ.-мат. наук, проф., проф. кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Российского государственного профессионально-педагогического университета

Русанов, Б. А.

Р89 **Обработка результатов измерений в лабораторном физическом практикуме** : учебное пособие для самостоятельной работы студентов / Б. А. Русанов, В. Е. Сидоров ; Уральский государственный педагогический университет. — Электрон. дан. — Екатеринбург : УрГПУ, 2023. — 1 CD-ROM. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-7186-2103-7

Учебное пособие предназначено для студентов педагогических университетов и институтов, изучающих курс физики в соответствии с рабочей программой дисциплины «Общая и экспериментальная физика», по специальности 44.03.05 «Педагогическое образование».

Пособие содержит основы статистического метода оценки погрешностей результатов измерений и практические указания по применению этого метода при реализации лабораторного физического практикума.

В пособии приведены справочные данные, необходимые для проведения оценки погрешностей измерений физических величин при выполнении лабораторных работ по дисциплине «Общая и экспериментальная физика».

УДК 378.016:53(075.8)
ББК В3я7

ISBN 978-5-7186-2103-7

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум по физике играет важную роль в усвоении базовых знаний у студентов — будущих учителей физики, которые они получают при изучении лекционного материала и решении задач.

Измерение физических величин, их обработка и визуализация являются одними из ключевых компетенций, необходимых будущим учителям физики и другим специалистам, профессиональная деятельность которых связана с инженерно-техническим направлением.

В данном учебном пособии приведены основы статистического метода обработки результатов измерений и указания по использованию этого метода при выполнении лабораторного физического практикума по дисциплине «Общая и экспериментальная физика».

Материал данного учебного пособия содержит основные определения, используемые в статистической обработке экспериментальных данных, а также приложения, содержащие часто используемые формулы для расчетов и примеры их использования.

Данное учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения педагогических университетов и институтов, изучающих курс физики в соответствии с рабочей программой дисциплины «Общая и экспериментальная физика» и федеральными государственными образовательными стандартами.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При обработке экспериментальных данных и определении погрешности результатов измерений основополагающим является предположение о виде закона распределения ошибок измерений — **статистическая гипотеза**. Чаще всего предполагается нормальный закон распределения, что должно быть подтверждено объективными методами.

Эксперимент — система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.

Опыт — воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.

План эксперимента — совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планирование эксперимента — выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Фактор — переменная величина, по предположению влияющая на результаты эксперимента.

Уровень фактора — фиксированное значение фактора относительно начала отсчета. Основной уровень фактора — натуральное значение фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале.

Нормализация факторов — преобразование натуральных значений факторов в безразмерные значения.

Априорное ранжирование факторов — метод выбора наиболее важных факторов, основанный на экспертной оценке.

Факторное пространство — пространство, координатные оси которого соответствуют значениям факторов.

Область экспериментирования — область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов.

Активный эксперимент — эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем.

Пассивный эксперимент — эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются.

Отклик — наблюдаемая случайная переменная, по предположению, зависящая от факторов.

Исследователь на этапе планирования эксперимента должен:

- помнить, к какому классу относится моделируемая система (статическая или динамическая, детерминированная или стохастическая);
- определить, какой режим работы его интересует, стационарный (установившийся) или нестационарный;
- знать, в течение какого промежутка времени следует наблюдать за поведением (функционированием) системы;
- знать, какой объём испытаний (то есть повторных экспериментов) сможет обеспечить требуемую точность оценок (в статистическом смысле) исследуемых характеристик системы.

План эксперимента организуется относительно основного скалярного параметра Y, который называется **наблюдаемой переменной.**

Пассивный эксперимент предполагает проведение большой серии опытных исследований с поочередным варьированием значений входных переменных x и анализом результатов измерений выходной переменной y (лабораторный эксперимент или эксперимент на экспериментальной установке).

Активный эксперимент проводится по заранее составленному плану, в соответствии с которым ставится задача не только определения оптимальных условий проведения эксперимента, но и оптимизации процесса (оптимальное планирование эксперимента).

В теории активного экспериментирования выходную (зависимую) переменную принято называть функцией отклика, а входные (независимые) переменные — факторами. Соответственно — координатное пространство с координатами ($x_1, x_2, \dots, x_N$) — факторным пространством, а геометрическое изображение функции отклика в факторном пространстве — поверхностью отклика.

Активный эксперимент планируется таким образом, чтобы упростить обработку его результатов методами регрессионного и корреляционного анализа.

К достоинствам активного экспериментирования относятся:

- возможность предсказания количества опытов, которые следуют провести;

- определение точек факторного пространства, где следует проводить опыты;
- отсутствие проблем, связанных с выбором вида уравнения регрессии;
- возможность определения оптимальных параметров процесса экспериментально-статистическим методом;
- сокращение объёма опытных исследований.

Анализ точности результата вычислений является важной составной частью вычислительного процесса.

Реальная оценка достижимого уровня точности способствует не только экономии сил и средств, но часто связана с вопросами надежности достигнутых результатов и безопасности их прикладного использования. Это более существенно для процесса обработки экспериментальных данных, когда к обычным источникам ошибок входных величин и вычислений добавляется случайный характер основной экспериментальной величины — опытного значения изучаемой функции в виде отклика объекта исследования.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ни одно измерение, как бы аккуратно оно ни проводилось, даже с использованием высокоточного оборудования и цифровых приборов, не может быть абсолютно свободно от погрешностей.

Проиллюстрируем это следующим примером. Допустим, мы измеряем рост студента. Взглянув на студента, можно грубо оценить его рост в 170 см. Реально при этом происходит сопоставление роста студента с эталоном, в данном случае — с представлением в нашей памяти о длине 170 см. Это грубое «измерение» определенно содержит погрешность. Можно учесть эту погрешность, допустив, что рост может быть и меньше, например, 165 см, и больше — 182 см. Произвести более точное измерение достаточно легко — необходимо взять длинную линейку или рулетку и определить, что рост студента равен 175,1 см. Такое измерение более точно, чем первоначальное, которое можно назвать прикидкой, но и оно, очевидно, содержит некоторую погрешность, поскольку невозможно уверенно сказать, что рост студента равен точно 175,1000 см, а не, например, 175,1001 см. Существует много причин, определяющих эту существующую неточность.

Часть из источников ошибок можно было бы устранить, если проявить больше внимания к процессу измерения. Например, одним из таких источников могло служить плохое освещение, затрудняющее считывание с линейки. Можно улучшить освещение и устранить эту проблему. С другой стороны, некоторые из источников погрешности присущи самому процессу измерения и никогда не могут быть полностью устранены. Например, предположим, что линейка проградуирована миллиметровыми делениями. Макушка головы студента не совпадаёт точно ни с одним из делений. В этом случае экспериментатор должен сам оценить положение макушки головы студента между двумя делениями. Если же макушка совпала с одним из делений, то следует учесть, что штрих деления имеет ширину порядка нескольких десятых миллиметра и нанесен на станке, который также мог внести погрешность.

Но даже измеряя рост студента с невероятной точностью, определить его все же не удалось бы точно, поскольку мы столкнемся с принципиальной проблемой: окажется, что рост студента в разных положениях его туловища различен. Даже в одном и том же месте можно обнаружить, что рост изменяется из-за сутулости спины, наличии и отсутствии густых волос, или даже времени проведения измерения (известно, что рост человека в утренние часы больше, чем в вечерние, из-за уменьшения межпозвонкового пространства при ходьбе в течение дня). Иначе говоря, мы обнаружим, что нет такой величины, как рост студента. Такая проблема называется проблемой определения. Она играет важную роль во многих научных измерениях. Описанный опыт иллюстрирует известную истину: ни одну физическую величину (длину, время, температуру и т. д.) нельзя измерить абсолютно точно. Ценой особых усилий мы можем свести ошибки до очень малых значений, но исключить их полностью невозможно.

Отметим, что точность полученного результата зависит не только от используемого прибора и внешних условий, но и от того, как поставлен эксперимент — например, от количества проводимых измерений. Если говорить о более сложных физических экспериментах, следует также понимать, что любая физическая теория описывает природу в некотором приближении. Это — модель, в которой мы пренебрегаем какими-то процессами и особенностями системы. Из-за приближенности моделей, на которых строится эксперимент, мы в принципе не можем определить истинного значения физической величины.

Когда мы говорим о научном эксперименте, истинное значение измеряемой величины знать не требуется, а требуется с достаточной для конкретного физического приложения достоверностью указать, насколько точен результат измерения, отличается ли он от истинного значения максимум на 5 % или на 0,5 %, с какой вероятностью при повторении эксперимента будет получено такое же значение.

Таким образом, значение физической величины, полученное в результате эксперимента, всегда содержит в себе ошибку и должно быть всегда указано с погрешностью. ***Даже стараясь быть очень внимательными и аккуратными, погрешностей избежать нельзя.*** Единственное, на что можно рассчитывать — это сведение погрешностей к минимуму и надежный расчет их величин.

В любом эксперименте истинное значение измеряемой величины (обозначим его X) неизвестно. Измеряя эту величину, получают лишь результат измерения x, в общем случае отличный от X. Модуль разности называется абсолютной погрешностью измеряемой величины:

$$|X - x| = \Delta x$$

Она также неизвестна, и задача теории ошибок — указать, как можно по результатам измерений оценить измеряемую величину и погрешность этой величины.

Отношение абсолютной погрешности измеряемой величины к модулю самой измеряемой величины называют относительной погрешностью и обычно выражают в процентах:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|X|} \cdot 100\%$$

Удобство использования относительной погрешности можно проиллюстрировать следующим примером. Допустим, мы измерили некоторую длину с абсолютной погрешностью $\Delta x = 1$ *см*. Насколько это точное измерение? Ответ зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от измеряемой величины. Если мы измеряли длину спичечного коробка, то измерение проведено с плохой точностью: $\delta x = 25\ \%$. Если же измерялся радиус Земли, то точность чрезвычайно высока: $\delta x = 10^{-7}\ \%$), измерения с такой точностью осуществлять очень сложно. Относительная погрешность, являясь безразмерной величиной, позволяет сравнивать между собой точности измерения различных величин.

Если измерение одной и той же физической величины производится несколько раз, то полученные результаты измерений x_1, x_2, ..., x_N не только отличаются от X, но чаще всего различны между собой. На результат измерения и на оценку погрешности измерения влияют различные факторы: условия измерений, характеристики измерительных приборов, сам экспериментатор, а также флуктуации измеряемой величины. Естественно предположить, что факторы, приводящие к разбросу результатов, случайны. В таком случае в качестве наилучшей оценки искомой величины можно взять среднее арифметическое всех полученных результатов:

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Это следует из того, что случайное воздействие может как увеличить, так и уменьшить полученный результат относительно истинного.

Погрешности, приводящие к появлению случайных отличий в результатах измерений, выполненных одним и тем же прибором в одинаковых условиях, называются ***случайными.*** Чем больше раз проводится измерение, тем ближе будет результат к неизвестному истинному значению измеряемой величины. Возможен и другой случай — когда увеличение числа измерений не приводит к уменьшению погрешности. Например, мы измеряем длину с помощью линейки, которая проградуирована неверно. Каждый раз будет получаться неправильное значение: если деления линейки нанесены чаще, чем нужно, то результат измерения будет завышен. Проведение измерения несколько раз не прибавит этому измерению точности — ошибка будет повторяться от измерения к измерению. Погрешности, которые невозможно свести к минимуму путем многократного повторения эксперимента, называются ***систематическими.*** Наконец, третий тип погрешностей, которые могут возникать — ***грубые ошибки или промахи.*** Источниками таких ошибок могут быть недостаток внимания экспериментатора (неверная запись показаний прибора, неправильно считанный отсчет) или неожиданные сильные внешние воздействия на измерения (например, резкий порыв ветра).

По причине возникновения погрешности можно разделить на приборные (инструментальные), методические, флуктуации случайной величины, а также субъективные ошибки (человеческий фактор).

Рассмотрим различные типы погрешностей и методы их вычисления. В физическом эксперименте имеется огромное количество разнообразных факторов, приводящих к случайному разбросу результатов измерений. Влияние случайных факторов на измеряемую величину неодинаково при каждом измерении и некоторые из таких факторов нам могут быть неизвестны. Более того, сама физическая величина по своей природе может флуктуировать (незначительно меняться около какого-то значения). Случайные ошибки присутствуют всегда. Невозможно так поставить эксперимент или обработать результаты измерений, чтобы исключить случайный разброс значений вокруг истинного значения физической величины.

Источником погрешностей могут быть, например, колебания воздуха, воздействующие на пружину при взвешивании; пылинка, осевшая на чашу весов; нагревание, трение, изменение влажности, усталость и психологический настрой наблюдателя, а также множество других причин, которые практически невозможно учесть. Можно лишь утверждать, что каждый мелкий эффект вносит некоторую ошибку, которая меняется от измерения к измерению, может быть в равной степени как положительной, так и отрицательной, т. е. является случайной величиной.

В случае, когда производится одно измерение, по его результату определить величину случайной ошибки невозможно. Если же измерение одной и той же величины повторяется несколько раз, случайный разброс в измеренных значениях дает незаменимую информацию: статистические методы обработки результатов измерений позволяют получить достаточно полные знания о случайной погрешности.

Необходимо различать случайный разброс результатов измерений, обусловленный флуктуациями физической величины из-за воздействия внешних факторов (в том числе и на прибор), и погрешность каждого из полученных значений, обусловленную, во-первых, конечной точностью прибора и, во-вторых, так называемой погрешностью снятия показаний со шкалы. Следует понимать, что несовершенство измерительных приборов и неточности снятия показаний сами по себе являются случайными факторами, влияющими на результат измерения (на число, записанное на бумаге). В случае правильной постановки эксперимента, при многократном повторении измерений их влияние, как и влияние любого случайного фактора, может быть сведено к минимуму.

Систематические ошибки — это погрешности, величина которых одинакова во всех измерениях, проводимых при одних и тех же условиях, одним и тем же методом с помощью одних и тех же измерительных приборов. В отличие от случайных ошибок, систематические ошибки не могут быть ни выявлены, ни устранены при помощи повторных измерений, так как при наличии систематических ошибок результаты всех измерений будут разбросаны не вокруг истинного, а вокруг «смещенного» значения.

В качестве примера можно привести измерение периода колебаний маятника при помощи отстающего секундомера. Сколько бы раз ни проводилось измерение, результат всегда будет получаться заниженным. Другой пример систематической ошибки: измеренная в воздухе масса тела отличается от истинной, в силу закона Архимеда, на массу воздуха в объеме тела. Если после измерений не внести поправку, то результат взвешивания будет содержать систематическую ошибку.

Приведенные выше примеры обладают существенным различием: во втором примере поправку на «потерю веса» можно вычислить, зная плотность воздуха и плотность тела. В первом же примере поправку на запаздывание прибора ввести нельзя, так как о ней ничего не известно. Если недостоверность результатов удалось обнаружить, ошибку можно устранить, заменив секундомер на более точный.

Возможные источники систематических погрешностей:

- неисправность или неверная градуировка приборов;
- наличие постоянных неучтенных факторов, влияющих на исследуемое явление (например, присутствие ферромагнетика в непосредственной близости от стрелки компаса);
- отличие реального объекта от применяемой модели (например, содержание примесей в исследуемом материале при определении плотности вещества);
- несовершенство методики, лежащей в основе опыта;
- применение упрощенных моделей вычисления (в случае косвенных измерений).

Причины, вызывающие систематические погрешности, исследуются в тех разделах физики, которые разрабатывают методику экспериментов. После выявления причин такие ошибки можно устранить или учесть.

Под промахом понимается ошибка, сделанная из-за недостатка внимания экспериментатора или из-за однократного неожиданного сильного воздействия внешних факторов. Например, при измерении длины линейкой промах может появиться в результате того, что один из концов измеряемого предмета по ошибке окажется совмещенным не с нулем шкалы, а с отметкой 5 см, и отсчет будет сделан без учета этой ошибки.

Для устранения промахов необходимо соблюдать аккуратность в работе и записях результатов. Иногда можно выявить промах, повторив измерение, перейдя на другой участок шкалы прибора, либо повторив измерения спустя некоторое время, когда наблюдатель уже забыл полученные ранее числа. Повторение измерения другим экспериментатором, которому неизвестны полученные ранее результаты, почти всегда поможет выявить промах. Именно поэтому в лабораторном практикуме измерения проводятся в группах по 2 человека. Однако и этот метод не дает стопроцентной гарантии: если, например, ошибка произошла из-за нечетко написанной цифры на шкале (например, иногда путаются цифры 3 и 8), то второй наблюдатель может повторить ошибку первого.

Как было упомянуто ранее, существует два вида измерений: прямые и косвенные.

При прямых измерениях искомая физическая величина измеряется непосредственно при помощи измерительного прибора.

Косвенным называется измерение, при котором интересующая нас величина вычисляется с использованием одного или нескольких непосредственно измеренных значений. При таких измерениях также необходимо вычислять погрешность результата, зная погрешности каждой из прямо измеренных величин в отдельности. После выполнения измерений и вычислений корректной формой записи результата эксперимента является указание наилучшей оценки измеряемой величины и интервала, в котором лежит ее истинное значение:

$$X = (< x > \pm \Delta x)$$

Эта запись означает, что $< x > + \Delta x$ – наибольшее вероятное значение измеренной величины, а $< x > - \Delta x$ — наименьшее.

При этом нельзя утверждать, что истинное значение абсолютно точно лежит между ними. Можно лишь сказать, что X находится в указанном интервале с некоторой вероятностью, строго зависящей от выбора Δx. Интервал указанных выше значений, называется доверительным интервалом, а соответствующая этому интервалу вероятность того, что истинное значение лежит внутри него — доверительной вероятностью α:

$$P(< x > - \Delta x < X < \ < x > + \Delta x) = \alpha$$

С вероятностью, равной α, результаты серии измерений величины X не выйдут за пределы доверительного интервала. Например, если $\alpha = 0{,}5$, то доля результатов, попадающих в доверительный интервал при повторениях такого же эксперимента равна 50 %.

Запись погрешности измерения без указания доверительной вероятности теряет смысл, а сравнение и учет погрешностей различных источников могут быть произведены, только если все погрешности соответствуют одной и той же доверительной вероятности.

Для удобства сравнения и приведения погрешностей к одинаковым значениям α в качестве единой меры измерения доверительных интервалов принято использовать так называемое стандартное отклонение.

Стандартное отклонение, обозначаемое σ — это такая ширина доверительного интервала, которая отвечает доверительной вероятности $\alpha = 0{,}68$. Для разных погрешностей (например, обусловленных разными источниками) σ может быть разным по величине, однако если $\Delta x = \sigma$, то $\alpha = 0{,}68$. Если известно, что для найденной абсолютной погрешности $\alpha = 0{,}68$, то это означает, что $\Delta x = \sigma$.

Определим абсолютную погрешность единичного измерения физической величины. Она может быть обусловлена двумя источниками.

- Погрешность измерительного прибора — это внутренняя характеристика прибора, как правило, определяемая в ходе калибровки сравнением показаний прибора с более точным (эталонным) устройством. Она указывается либо на самом приборе, либо в сопроводительных документах (в паспорте прибора). Данную погрешность принято называть погрешностью показаний прибора либо приборной погрешностью и обозначать $\Delta x_{приб}$.
- Ошибки экспериментатора. В этом случае ошибка зависит от человека, проводящего эксперимент, так что можно сказать, что данная погрешность субъективна. Эту погрешность принято называть погрешностью отсчета либо погрешностью снятия показаний и обозначать $\Delta x_{отсч}$.

Для определения погрешности одного измерения в общем случае необходимо учитывать обе указанных погрешности. Рассмотрим эти погрешности детально.

Любое измерение физической величины производится при помощи измерительного прибора (линейка, вольтметр, осциллограф). При этом точность показаний может быть обеспечена только в определенных пределах, связанных с конструкцией устройства и физической схемой измерений. Эта точность определяет погрешность измерения, называемую погрешностью показаний прибора. Для стрелочных приборов неточность измерения связана с конструкцией как механических, так и электромагнитных элементов. Абсолютная приборная погрешность таких приборов не зависит от измеряемой величины и постоянна для всех ее значений. Отношение этой погрешности к пределу шкалы, выраженное в процентах, называется классом точности, который является характеристикой данного прибора. Например, если на приборе указан класс точности $\gamma = 1{,}0$, это означает, что относительная погрешность показаний прибора не превышает $1{,}0\ \%$ от максимального значения на шкале.

Абсолютная приборная погрешность рассчитывается по формуле:

$$\Delta x_{\text{приб}} = \frac{\gamma x_{max}}{100}$$

где $\Delta x_{приб}$ — абсолютная приборная погрешность, γ — класс точности, x_{max} — максимальное значение величины, которое может быть измерено данным прибором (предел шкалы).

Так как абсолютная погрешность таких приборов фиксирована, относительная погрешность измерения будет тем меньше, чем больше значение измеряемой величины.

Доверительная вероятность, отвечающая приборной погрешности, должна быть задана в паспорте прибора. Например, если рядом с классом точности стоит пометка «3σ», либо указано, что данная погрешность является максимальной ошибкой прибора, то доверительная вероятность равна $0{,}997$. В противном случае следует считать, что $\Delta x_{приб}$ отвечает стандартной доверительной вероятности $\alpha = 0{,}68$.

Для приборов типа магазинов сопротивлений, емкостей, индуктивностей, для которых погрешность связана только с величиной, выставленной на них, абсолютная приборная погрешность также задается классом точности, который определяется как выраженное в процентах отношение этой погрешности к выставленной величине: $\Delta x_{приб} = \gamma\ x_{изм}$, где $x_{изм}$ — выставленная прибором величина.

Погрешности линеек, микрометров, штангенциркулей и некоторых других приборов иногда наносятся на самом приборе (на шкале). Обычно таким образом указывается наибольшая абсолютная погрешность, которую мы вынуждены считать постоянной вдоль всей шкалы прибора.

При снятии показаний со стрелочного прибора возникает необходимость округления результатов до ближайшей метки шкалы или интерполяции (оценки долей деления), и это так или иначе вносит влияние человеческого фактора в точность измерений. Погрешность отсчета, связанная с округлением или интерполяцией, зависит от размера делений, освещенности шкалы, а также зоркости экспериментатора.

$$\theta_{\text{отсч}} = \frac{l_{\text{ц.д.}}}{2},\ \alpha = 0{,}997$$

$$\theta_{\text{отсч}} = \sigma_{\text{отсч}} = \frac{l_{\text{ц.д.}}}{6},\ \alpha = 0{,}68$$

Чтобы измерить физическую величину, мы должны определить то место на шкале прибора, куда указывает стрелка.

В случае, если деления нанесены часто или если абсолютная приборная погрешность имеет один порядок с ценой деления шкалы, пытаться оценивать доли деления на глаз нецелесообразно, и показание необходимо округлить. Вывод — величина лежит ближе к данной метке, чем к соседней, зависит от каждого конкретного наблюдателя и его угла зрения. Тем не менее, стрелка находится ближе либо к одной отсечке, либо к другой, поэтому максимально возможная ошибка при округлении равна половине цены деления.

Если метки шкалы прибора расположены редко, то большинство наблюдателей могут провести визуальную интерполяцию: оценить, в каком месте между метками расположена стрелка прибора.

При снятии показаний с цифрового прибора погрешности отсчета чаще всего отсутствуют. Иногда встречаются ситуации, когда цифры на приборе быстро меняются около какого-то значения, и, проводя измерение, мы фиксируем и записываем какое-то одно. В таком случае в качестве погрешности снятия показаний следует взять либо *1/2* от диапазона изменения показаний, либо единицу разряда, который остается неизменным.

Для правильного определения итоговой погрешности необходимо привести все дающие вклад погрешности к одной доверительной вероятности. Поскольку погрешность прибора и погрешность снятия показаний имеют различную природу, то они, естественно, являются независимыми. Ниже будет показано, что в таком случае суммарная погрешность определяется как корень из суммы их квадратов.

$$\theta_x = 1{,}1\sqrt{\theta_{\text{приб}}^2 + \theta_{\text{отсч}}^2}$$

В случае, если одна из вносящих вклад погрешностей значительно превосходит другую (на один или несколько порядков), в качестве итоговой погрешности достаточно взять максимальную из них.

$$\theta_x = \max\left(\theta_{\text{приб}},\ \theta_{\text{отсч}}\right)$$

Однократное измерение физической величины не несет никакой информации о случайных погрешностях, присущих любому эксперименту. Чтобы оценить такие погрешности, необходимо провести серию измерений (повторить измерение несколько раз). При этом, результат каждого отдельного измерения имеет некоторую погрешность сам по себе (из-за конечной точности прибора и снятия показаний). Поэтому, когда мы говорим, что результаты отличаются друг от друга, речь идет о несовпадении в пределах данной погрешности. Рассмотрим способы оценки случайной погрешности. Допустим, сделано N измерений, и мы получили набор отличающихся друг от друга результатов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

Если все измерения проделаны одним и тем же методом и одинаково тщательно, такие измерения называются равноточными. При определенных условиях наилучшей оценкой истинного значения X является среднее арифметическое значение $\langle x \rangle$, вычисленное из всего ряда результатов измерений.

Для оценки величины погрешности измеренной величины существует несколько способов. Наиболее распространена оценка с помощью стандартной (среднеквадратичной) ошибки. Иногда также применяется средняя арифметическая ошибка. Эти погрешности характеризуют среднюю случайную погрешность отдельных измеренных значений серии x_1, $x_2, \ldots, x_N$. Очевидно, что чем больше каждое отдельное значение x_i отличается от среднего $\langle x \rangle$, которое мы считаем наиболее вероятным значением физической величины, тем хуже мы знаем результат. Поэтому в величину погрешности должны входить разности $(x_i - \langle x \rangle)$, называемые отклонениями.

Среднеквадратичная ошибка S_x — это случайная ошибка каждого единичного результата при проведении N измерений. Она характеризует случайный разброс результатов измерении x_i вокруг наиболее вероятного значения $<x>$.

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \ <x>)^2}{N(N-1)}}$$

Пользуясь среднеквадратичной ошибкой S_x, легче определять доверительные вероятности: как упоминалось выше, для любой величины доверительного интервала, выраженного в единицах σ, доверительная вероятность может быть рассчитана.

Как распределены величины x_i относительно среднего значения $<x>$? Мы предполагаем, что x_i могут принимать непрерывный ряд значений от минус бесконечности до плюс бесконечности, причем результат измерения тем вероятнее, чем меньше его отклонение от среднего значения $<x>$. Далее будем полагать, что если характер отклонения результата измерения от истинного значения случаен, то для большого количества измерений физической величины результаты индивидуальных измерений распределены нормально, то есть подчиняются распределению Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x- <x>)^2}{2\sigma^2}}$$

Параметрами в функции $f(x)$ являются значения среднего $<x>$ и стандартного отклонения σ, которые были введены выше. То, что в качестве наилучшей оценки истинного значения X выбрана величина $<x>$, а разброс x_i относительно $<x>$ при большом количестве измерений определяется величиной среднеквадратичной ошибки σ, есть следствие именно того, что нормальное распределение случайных величин имеет вид данного уравнения.

Если измерения проводятся с высокой точностью (т. е. среднеквадратичная ошибка мала), то все результаты серии будут близки к истинному значению измеряемой величины и график функции $f(x)$ будет иметь вид узкого острого пика. Если же точность измерений низкая (σ велико), то результаты будут сильно отличаться друг от друга, и их распределение будет описываться широкой пологой кривой. Каждая точка кривой *f(x)* соответствует той доле измерений, результат которых попал в интервал значений (x, $x+dx$). Наиболее вероятное для нормального распределения значение $<x>$ встречается при измерениях чаще всего, и потому в точке $x = <x>$ функция имеет максимум. Функция *f(x)* называется плотностью вероятности распределения величины, а её смысл состоит в том, что она определяет вероятность обнаружить случайную величину x в каком-либо интервале значений.

Использование распределения Гаусса предполагает, что выполнено большое число измерений. В этом случае мы знаем стандартное отклонение σ и можем определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала. Однако мы можем определить лишь величину σ, соответствующую тому или иному количеству измерений N, чаще всего сравнительно небольшому (в лабораторных работах редко встречаются ситуации, когда величина измеряется более 20 раз). В случае небольших N распределение результатов измерений выглядит иначе и называется распределением Стьюдента.

Чтобы получить доверительный интервал в этом случае, необходимо домножить величину среднеквадратичного отклонения на коэффициент Стьюдента, который отражает отличие в распределениях для конечного и бесконечного числа опытов. Этот коэффициент зависит от α и от N, и при больших N стремится к величине, которая будет соответствовать гауссовскому распределению. Для практической работы с данными обычно используют таблицу коэффициентов Стьюдента, которая приведена в ***Приложении 1.***

Формула для погрешности в этом случае имеет вид:

$$\varepsilon = t_{p,n} \cdot S_x$$

Таким образом, границу полной погрешности Δx оценивают по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\varepsilon^2 + \theta_x^2}$$

Окончательный результат прямого измерения записывается в виде:

$$x = < x > \pm \Delta x$$

В случае, если функция, описывающая экспериментальные данные, известна, её погрешности могут быть определены с использованием известных закономерностей (***Приложение 2***).

Очевидно, что при реализации лабораторного физического практикума искомая физическая величина определяется посредством независимых измерений других величин, которые измеряются напрямую. Такая величина является косвенно измеренной.

Пусть некоторая величина y связана функциональной зависимостью с другими независимыми друг от друга величинами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые измеряются напрямую:

$$y = f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$$

Требуется найти абсолютную и относительную погрешности этой функции, если известны ошибки независимых переменных.

На первом этапе рассчитываются средние для каждой измеренной величины: $<x_1>, <x_2>, \ldots, <x_n>$. Граница полной погрешности величины y вычисляется по формуле, имеющей в общем случае вид:

$$\Delta y = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1)^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2)^2 + \cdots + (\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i)^2}$$

где $\partial y/\partial x_i$ — частная производная от функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по аргументу x_i, Δx_i — граница полной погрешности величины x_i.

Чаще вычисляют значение относительной погрешности γ, которое можно получить, поделив обе части вышеприведенного равенства на значение самой функции y:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y}\sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1)^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2)^2 + \cdots + (\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n)^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{1}{y}\Delta x_1)^2 + \cdots + (\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{1}{y}\Delta x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{1}{y}\Delta x_i)^2}$$

Поскольку выражение $\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{1}{y}$ является частной производной по x_i от функции $ln\, y$, то выражение для значения γ примет следующий вид:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial lny}{\partial x_i}\Delta x_i)^2}$$

Общий алгоритм обработки данных физического эксперимента в лабораторном практикуме приведен в ***Приложении 3.***

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

При записи результата расчётов физической величины и её погрешности в виде

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x$$

необходимо руководствоваться следующим правилом записи: в полученном результате погрешность необходимо округлить до первой значащей цифры, а в среднем значении последней оставить цифру в том разряде, в котором погрешность.

Значащими цифрами называются все цифры (если смотреть на число справа), кроме нуля. Нуль считается значащей цифрой, если находится между значащими цифрами (2,043), в конце числа и означает отсутствие единиц соответствующего разряда в числе (3,350). Для числа x = 0,023 нули (0,0) уже не являются значащими цифрами, число x содержит две значащие цифры (2 и 3).

При записи погрешности её значение следует округлять до первой значащей цифры, например, x = (125,57 ± 0.28) м, тогда при округлении x = (125,6 ± 0,3) м. Как видно из примера, сам результат тоже округляется до единиц того разряда, который содержится в погрешности после её округления. Отметим, что если первая цифра в значении погрешности равна единице, то погрешность округляется до двух значащих цифр.

Пример:

<x> = 12,345 ед.

Рассчитанная величина погрешности: *0,0678 ед.*

Итоговая запись: *x = (12,35 ± 0,07) ед.*

Рассчитанная величина погрешности: *0,678 ед.*

Итоговая запись: *x = (12,3 ± 0,7) ед.*

Рассчитанная величина погрешности: *6,78 ед.*

Итоговая запись: *x = (12 ± 7) ед.*

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

При реализации лабораторного физического практикума проводится исследование известных теоретических зависимостей, либо аппроксимация полученных экспериментальных данных функцией.

Так, на основе полученных из эксперимента данных, может быть восстановлен график функции $Y=f(X)$, который хорошо описывает полученные данные и может быть использован для экстраполяции данных (рисунок 1).

Графики дают исследователям наглядное представление о виде зависимости полученных данных от параметров эксперимента. По графикам можно оценить параметры функциональной зависимости $f(X)$. Например, если зависимость Y от X линейна, т.е. $Y=aX+b$, то можно сделать оценку коэффициентов a и b.

Правила построения графиков:

1. Графики строят на миллиметровой бумаге;
2. График должен иметь название;
3. Оси координат должны иметь название с указанием соответствующей физической величины и её единиц измерения. Названия осей располагаются в области окончания оси (у стрелки);
4. По оси абсцисс откладывают значение независимого параметра (X), а по оси ординат — зависимого параметра (Y);
5. График должен быть читаемым. Масштаб осей должен быть выбран в соответствии с порядком измеренных и рассчитанных величин;
6. Результаты измерений на графике изображают в виде аккуратной точки заметного размера.

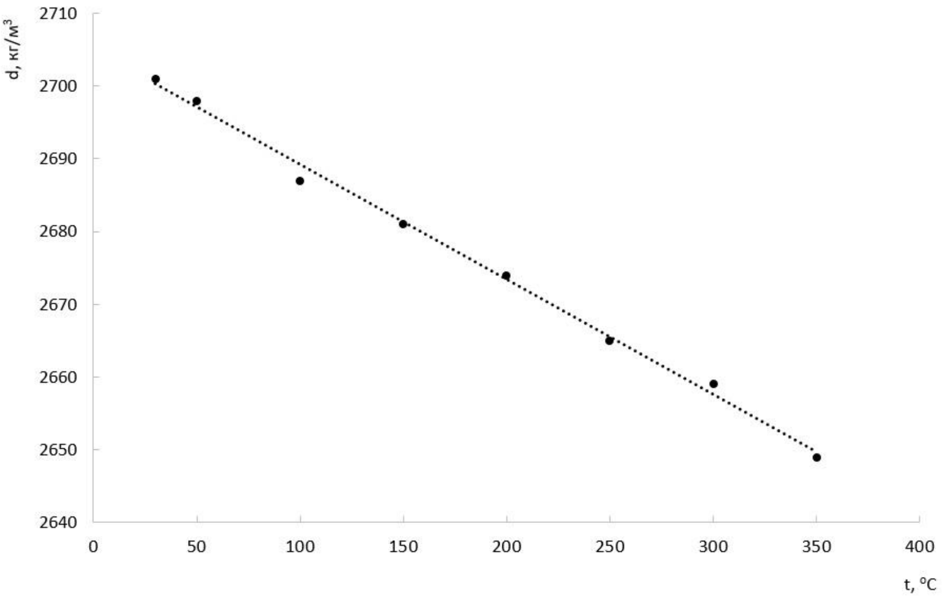

Рисунок 1. График температурной зависимости плотности алюминия
Точки — экспериментальные данные.
Прямая — аппроксимирующая функция

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / В. Е. Гмурман, В. В. Гмурман, Т. В. Колосова. — 12-е изд. — Москва : Юрайт, 2014. — 479 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-3461-8. — EDN: VTUFDL. — URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25854643. — Текст : электронный.
2. Голицына, О. М. Математическая обработка результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики / О. М. Голицына, А. В. Меремьянин, В. Е. Рисин. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2015. — 20 с. — URL: https://phys.vsu.ru/~meremianin/pdfs/Pogreshnosti.pdf. — Текст : электронный.
3. Кравченко, Н. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме : учебное пособие / Н. Кравченко, О. Ревинская. — Томск : Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2011. — 86 с. — ISBN 978-5-98298-850-8. — EDN TDSNGZ. — URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22744241. — Текст : электронный.
4. Ягодин, Д. А. Обработка результатов измерений в лабораторном физическом практикуме / Д. А. Ягодин, Е. В. Рожицина ; Урал. гос. пед. ун-т. — Екатеринбург : [б. и.], 2011. — 40 с. — URL: https://library.uspu.ru/novosti/arkhiv-novostej/item/1286-. — Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{p.n}$ для n наблюдений при доверительной вероятности p

n	*Доверительная вероятность, P*					
	0.7	***0.8***	***0.9***	***0.95***	***0.99***	***0.999***
2	1.96	3.08	6.31	12.71	63.7	637
3	1.34	1.89	2.92	4.30	9.92	31.6
4	1.25	1.64	2.35	3.18	5.84	12.9
5	1.19	1.53	2.18	2.77	4.60	8.61
6	1.16	1.48	2.02	2.57	4.03	6.85
7	1.13	1.44	1.94	2.45	3.71	5.96
8	1.12	1.42	1.90	2.36	3.50	5.40
9	1.11	1.40	1.86	2.31	3.36	5.04
10	1.10	1.38	1.83	2.26	3.25	4.78
11	1.09	1.37	1.81	2.23	3.17	4.59
12	1.09	1.36	1.80	2.20	3.11	4.49
13	1.08	1.36	1.78	2.18	3.06	4.32
14	1.08	1.35	1.77	2.16	3.01	4.22
15	1.08	1.35	1.76	2.14	2.98	4.14
16	1.07	1.34	1.75	2.13	2.95	4.07
17	1.07	1.34	1.75	2.12	2.92	4.02
18	1.07	1.33	1.74	2.11	2.90	3.96
19	1.07	1.33	1.73	2.10	2.88	3.92
20	1.07	1.33	1.73	2.09	2.86	3.88
40	1.07	1.33	1.73	2.04	2.74	3.62
60	1.04	1.33	1.72	2.03	2.72	3.51
120	1.04	1.30	1.66	1.98	2.62	3.37
∞	1.04	1.28	1.65	1.96	2.58	3.29

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Формулы для определения погрешностей функции $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

вид функции $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$	абсолютная погрешность Δy	относительная погрешность $\gamma = \Delta y / y$
$y = x_1 + x_2$	$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2}}$
$y = x_1 - x_2$	$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2}}$
$y = x_1 \cdot x_2$	$\sqrt{(x_2 \Delta x_1)^2 + (x_1 \Delta x_2)^2}$	$\sqrt{(\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2}$
$y = x^m$	$m x^{m-1} \Delta x$	$m \frac{\Delta x}{x}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$	$\frac{1}{x_2} \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\frac{x_1}{x_2})^2 (\Delta x_2)^2}$	$\sqrt{(\frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (\frac{\Delta x_2}{x_2})^2}$
$y = x_1^n \cdot x_2^m$	$x_1^n x_2^m \sqrt{(n \frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (m \frac{\Delta x_2}{x_2})^2}$	$\sqrt{(n \frac{\Delta x_1}{x_1})^2 + (m \frac{\Delta x_2}{x_2})^2}$
$y = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{\Delta x}{n x^{(n-1)/n}}$	$n \frac{\Delta x}{x}$
$y = \sin x$	$\Delta x \cdot \cos x$	$\Delta x \cdot ctgx$
$y = \cos x$	$\Delta x \cdot \sin x$	$\Delta x \cdot tgx$
$y = tg\, x$	$\frac{\Delta x}{cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{sin2x}$
$y = \ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{xlnx}$
$y = \lg x$	$\frac{\Delta x}{x \cdot ln(10)} = 0.434 \frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \cdot lgx \cdot ln(10)} = 0.434 \frac{\Delta x}{xlgx}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Алгоритм обработки данных физического лабораторного практикума

При проведении физического лабораторного практикума существует два основных вида измерений:

1. Прямые;
2. Косвенные.

При проведении прямых измерений существует несколько видов погрешностей: случайная; систематическая; полная. При осуществлении косвенных измерений может быть рассчитана только полная погрешность.

Последовательность действий экспериментатора при проведении прямых измерений

1. Определение случайной погрешности:

- Получение данных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
- Определение среднего значения $< x >= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$;
- Определение среднеквадратичной ошибки $S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)^2}{n(n-1)}}$;
- Расчет случайной погрешности $\varepsilon = t_{p,n} \cdot S_x$, где $t_{p,n}$ — коэффициент Стьюдента (Приложение 1).

2. Определение систематической погрешности:

- $\theta_x = 1{,}1\sqrt{\theta_{\text{приб}}^2 + \theta_{\text{отсч}}^2}$,

где $\theta_{\text{отсч.}}$=1/2 цены деления; $\theta_{\text{приб.}}$ берётся из паспорта прибора, а если его нет, то считается равной цене деления.

3. Определение полной погрешности:

- $\Delta x = \sqrt{\varepsilon^2 + \theta_x^2}$

4. Запись результата в виде

$$x =< x > \pm \Delta x \text{ при p=0,95}$$

Последовательность действий экспериментатора при проведении косвенных измерений:

Предположим, что некоторая физическая величина зависит от некоторых параметров

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

1. Необходимо рассчитать среднее значение величины:

$$< y >= f(< x_1 >, < x_2 >, \dots, < x_n >)$$

2. Погрешность косвенного измерения:

$$\Delta y = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1)^2 + (\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2)^2 + \cdots + (\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i)^2}$$

3. Запись результата в виде: $y =< y > \pm \Delta y$

Учебное издание

Обработка результатов измерений в лабораторном физическом практикуме

Уральский государственный педагогический университет.
620091 Екатеринбург, пр-т Космонавтов, 26.
E-mail: uspu@uspu.ru

620091, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26, www.uspu.ru