Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки). Математика и информатика»

Работа допущена к защите:

______________ __________________
дата подпись

Исполнитель:

Атангулов Михаил Юрьевич
студент группы МИ-1931

____
подпись

Научный руководитель:

Бодряков В.Ю., доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и методики обучения математике

____
подпись

Екатеринбург 2024

Оглавление

Введение

В условиях непрерывно изменяющихся сфер деятельности, исчезновения одних профессий и появления новых, цифровизации общества, повышения интереса и активности во множестве аспектов жизни общества сейчас особенно остро стоит вопрос адаптации граждан этого общества к новым, часто сложно представляемым заранее, условиям формирования личной компетентности в сфере профразвития. Функциональную грамотность можно с уверенностью назвать важным личностным качеством, которое отражает, насколько гражданин готов проявить адаптивность к различным изменениям.

Актуальность темы подтверждается государственными нормативными актами в области образования.

ФГОС ООО[1] поясняет, что в «целях обеспечения реализации программы основного общего образования в Организации для участников образовательных отношений должны создаваться условия, обеспечивающие возможность формирования функциональной грамотности обучающихся, включающей овладение компетенциями, составляющими основу дальнейшего успешного образования и ориентации в мире профессий».

Формирование функциональной математической грамотности становится приоритетной задачей современной школы.

Исследования проблемы формирования и развития функциональной математической грамотности школьников с теоретической стороны осуществлялись методистами Института стратегии развития образования ИСРО РАО (Денищева Л.О., Квитко Е.С., Ковалева Г.С., Краснянская К.А., Рослова Л.О.), равно как и представителями других организаций, работающих в сфере науки и образования (Алексеева Е.Е., Валеев И.И., Дударева Н.В. и Утюмова Е.А.,

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897)

Семенова И.Н., Иванова Т.А., Лукичева Е.Ю., Симонова О.В., и др.). Разнообразные аспекты проблем формирования и развития функциональной математической грамотности обучающихся на практике содержатся в работах Бодрякова В.Ю., Ушаковой М.А., Саниной Е.И., Насикан И.В., и др.

В последние годы кафедра высшей математики и методики обучения математике УрГПУ направляла свои исследовательские усилия на изучение понятия и дидактического потенциала «функциональной математической грамотности». Эти усилия привели к успешной разработке ряда педагогических инструментов, способствующих формированию, последовательному развитию и оценке ФМГ. К эффективным методам формирования и развития ФМГ, в частности, можно отнести следующие:

— историко-библиографический: исследование истории того, как конкретные прикладные задачи решались математиками в прошлом, а также изучение и сопоставление с этим современных методов решения подобных задач;

— задачный: решение специально подобранных контекстных задач;

— проектный: подготовка обучающимися личных учебно-исследовательских проектов, включающих решение практических задач освоенными ими методами;

— модельный: создание математических или компьютерных моделей наблюдаемых в реальности явлений и процессов, исследование этих моделей и прогнозирование потенциальных результатов с помощью получаемых благодаря им данных;

— экспериментально-лабораторный: выполняемые в формате коротких лабораторных работ разработка и экспериментально-лабораторное исследование математических моделей реальных объектов, процессов и явлений.

Таким образом, актуальность темы настоящего исследования непосредственно связана с ее высокой значимостью для решения практических задач, связанных с успешным формированием функциональной математической грамотности у обучающихся.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: формирование функциональной математической грамотности обучающихся при решении экстремальных задач с геометрическим содержанием.

Цель исследования: разработать совокупность экстремальных задач с геометрическим содержанием с заданиями для формирования функциональной математической грамотности.

На основании цели исследования были сформулированы следующие **задачи исследования**:

1) провести анализ психолого-педагогической и методической литературы с целью определения понятия общей функциональной и функциональной математической грамотности у обучающихся;
2) описать средства формирования и оценивания функциональной математической грамотности обучающихся;
3) выделить дидактические принципы построения заданий к экстремальным задачам с геометрическим содержанием для формирования функциональной математической грамотности у обучающихся;
4) разработать совокупность экстремальных задач с геометрическим содержанием с заданиями для формирования функциональной математической грамотности.

Методы исследования включают комплексный анализ учебно-методической и научной литературы, проектирование заданий.

Глава 1. Теоретико-методологические основы формирования функциональной математической грамотности в учебном процессе

1.1. Понятие общей функциональной и функциональной математической грамотности у обучающихся

Для обстоятельного введения в изучаемый вопрос начнем с рассмотрения самой сути понятия «функциональная грамотность». Впервые данный термин был введен и документально закреплен на тегеранском Всемирном конгрессе министров просвещения в 1954 году, — во время радикального переосмысления и расширения традиционного понятия грамотности в самом общем смысле. Уже через три года, в 1957 году, ЮНЕСКО впервые представила публике готовое определение функциональной грамотности. Она понималась как «совокупность умений читать и писать для использования в повседневной жизни и удовлетворения житейских проблем» [44].

В плеяду отечественных ученых-пионеров, исследовавших понятия грамотности и функциональной грамотности в системно-теоретическом аспекте, входил академик Б.С. Гершунский. В своей статье «Грамотность для XXI века» [11], увидевшей свет в 1990 году, — как раз его ЮНЕСКО объявила Международным годом грамотности, — он подчеркнул необходимость содержательной реконцептуализации этого феномена ввиду приближения нового тысячелетия и перемен в сфере образования. Гершунский разграничил два подхода, через которые можно было бы осмыслять, насаждать и оценивать «грамотность»: прагматический, который связывает грамотность с механическим выполнением функциональных обязанностей на рабочем месте и в обществе, и личностно-ориентированный, главной целью которого становится осознанное и гармоничное развитие грамотной личности. Система образования отражает эту бинарность различиями в подаче и восприятии реального и элитарного классического образования. Очевидно, что самому автору был ближе второй подход: именно он впоследствии лег в основу концепции грамотности как важнейшего элемента комплексного становления личности.

Б.С. Гершунский считает, что преобразование человека идет по следующему пути: «грамотность — образованность — профессионализм — культура — менталитет» и определяет грамотность как важный «этап в становлении человека», «необходимую ступень и образованности, и профессиональной компетентности, и культуры человека… содержащую в себе «эмбрионы», ростки каждого из последующих этапов становления личности» [11, с. 60].

Оценка математической подготовки 15-летних обучающихся, если обратиться к широко используемому в подобных исследованиях комплексу исследований PISA (Международной программы по оценке образовательных достижений обучающихся), основывается на таком определении: «Математическая грамотность – это способность индивидуума проводить математические рассуждения и формулировать, применять, интерпретировать математику для решения проблем в разнообразных контекстах реального мира». Обучающая система подразумевает наличие в ней концепций, процедур, инструментов и фактов, облегчающих человеку описание, объяснение и предсказание наблюдаемых или прогнозируемых ими явлений. Она помогает осознать роль, которую математика играет в мире, и научить человека принимать хорошо обоснованные суждения и решения, которые можно было бы ожидать от конструктивно мыслящего, заинтересованного и глубоко рефлексирующего гражданина XXI века [51, 27].

Holenstein M., Bruckmaier G., Grob, A. в исследовании [47] берут за основу определение математической грамотности, сформулированной для исследования PISA. также авторы отмечают важность математической грамотности для общих академических достижений. Математическая грамотность связана с достижениями в областях, связанных с математикой, а также в областях, не имеющих прямого отношения к математике (аудирование и понимание прочитанного). Это не только подчеркивает влияние МГ на понимание математики в современных жизненных контекстах, но также указывает на существование эффекта переноса применения этого понимания для повышения компетентности в областях, отличных от математики.

Также авторы отмечают, что такие предикторы, как навыки вычисления, математическая Я-концепция, понимание прочитанного и когнитивные навыки имеют значение для развития математической грамотности и связи с последующей успеваемостью в других областях.

Профессор Ноттингемского университета (Великобритания) Levine K. [48] уточняет, что термин «функциональная грамотность» был впервые введён американским професссором Gray W.S. в работе «The teaching of reading and writing» (1956) [46]. Levine отмечает, что опрос грамотности граждан в возрасте от 15 до 50 лет в США стал ключевым как для понимания концепта, так и для разработки программ оценки функциональной грамотности. Также автор подчеркивает, что деятельность, связанная с грамотностью, рассматривается ЮНЕСКО в контексте «фундаментального образования», которое включает умения думать, говорить, слушать и считать наряду с чтением и письмом. Эти навыки направлены на «помощь людям в развитии лучшего в их культуре», но образование ими не ограничивается. Напротив, они являются важным средством достижения более полной и творческой жизни.

О.К. Подлипский в 2020 г. утверждал: «математическая грамотность, как одна из составляющих функциональной грамотности, означает способность решать проблемы, логически рассуждать и анализировать информацию. Математическая грамотность является вторым по значимости компонентом функциональной грамотности вместе с читательской грамотностью. Она предполагает способность использовать математику, чтобы помочь решить реальные проблемы, включает также способность понимать «язык» математики» [26, с. 104].

В исследовании PISA-2022 организаторы считают, что «математически грамотным человеком является тот, кто может математически рассуждать, решать сложные проблемы реальной жизни и находить решения, формулируя, применяя и интерпретируя математику» [27].

Л.О. Рослова [33] прямо утверждает, что содержание, понимаемое организаторами исследования как присущее этой стороне изучаемого явления, на самом деле соответствует так называемой «функциональной грамотности». При этом, по словам А.А. Леонтьева, функциональная грамотность у человека напрямую связана с применением постоянно приобретаемых на протяжений жизни знаний, умений и навыков для решения широкого спектра жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений [24, с. 35, 25].

Институт статистики ЮНЕСКО, деятельность которого посвящена сбору, обработке, проверке, анализу и распространению качественных и актуальных данных о ряде культурно-образовательных и коммуникационных аспектов жизни человека и общества, понимает *функционально грамотного человека* таким образом: «Человек является функционально грамотным, если он/она может участвовать во всех видах деятельности, в которых грамотность необходима для эффективного функционирования его/ее группы и сообщества, а также которая позволяет им продолжать использовать чтение, письмо и счет для своих собственных нужд, а также для развития общества»[44].

И.И. Валеев полагает, что «функциональная математическая грамотность выражается в осознании роли математики в исследовании окружающего мира, а также в способностях, которые свойственны мыслящему человеку: высказывать аргументированно мнения, суждения и использовать математику для удовлетворения возникающих потребностей» [10].

Иванова Т.А., в свою очередь, приводит более узкое определение функциональной грамотности, применимое именно в контексте обучения математике: «Функциональная грамотность при обучении математике – это интегральная характеристика качества подготовки ученика, которая помимо усвоенных знаний, умений и опыта деятельности отражает его личностный смысл, его эмоционально-ценностное отношение к математике и математической деятельности, к опыту их применения для решения реальных задач» [20].

ФГОС третьего поколения (2021 г.)[2] суммирует функциональную грамотность как «способность решать учебные задачи и жизненные проблемные ситуации на основе сформированных предметных, метапредметных и универсальных способов деятельности, включающей овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу дальнейшего успешного образования и ориентации в мире профессий».

Семенова И.Н. и Шорохов Е.А. сформулировали суждение о том, что «функциональная математическая грамотность — это способность человека применять различные математические знания, умения, навыки и компетенции, которые были получены и освоены в процессе обучения и развития, для решения разнообразных задач реального мира, функционирования в обществе и дальнейшего саморазвития»[37].

Обобщая вышесказанное, под **функциональной математической грамотностью** в рамках настоящего исследования будем понимать как *комплексную способность человека продуктивно применять усвоенные математические знания, умения, навыки и компетенции для решения различных задач реального мира, успешного функционирования в обществе и саморазвития в течение жизни*, так как это определение соответствует цели исследования и поможет достичь поставленных задач.

[2] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897)

Также в исследованной для создания текущей работы литературе и пособиях приводится характеристика математически образованного выпускника[3] общеобразовательной школы, представленная через стратегические цели школьного математического образования. Перечислим те из них, которые относятся к функциональной математической грамотности и, соответственно, использовать для проверки полученных в ходе исследования результатов:

— математически образованный выпускник имеет представление об особенностях математического метода познания действительности;

— понимает, что сама математика является рабочим методом познания действительности;

— имеет представление о математическом моделировании и приобрел реальный опыт применения такого подхода для изучения простейших явлений и процессов, наблюдаемых им в реальности;

— имеет комплексное представление о прикладных аспектах математики;

— знает основные общенаучные методы познания (эвристические и логические), умеет применять их как в математической деятельности, так и в других ее видах.

Важно подчеркнуть, что достижение этих целей формирует деятельностный характер математических знаний, объединяя различные аспекты математической грамотности в гармоничное целое. Также следует отметить, что реализация этих целей должна происходить на всех уровнях обучения, так, чтобы ее можно было адаптировать к разным возможностям и уровням понимания обучающихся.

---

[3] Математически образованный выпускник должен обладать не только знаниями в области математики, но и иметь широкий кругозор в других областях науки и культуры. А также быть способным применять математический аппарат для решения разнообразных задач.

Развитие и оценка реальной математической грамотности обучающихся могут быть проведены посредством использования системы, которую приводит Алексеева Е.Е. в работе [3]. В этой системе собран ряд тщательно подобранных контекстных функциональных заданий (КФЗ), которые характеризуются комплексным практическим, практико-ориентированным и межпредметным содержанием. Содержание деятельности ФМГ при этом было конкретизировано именно с фокусов на выполнении КФЗ (Таблица 1).

Таблица 1

Деятельность при выполнении заданий системы контекстных функциональных заданий в соответствии с видами деятельности математической грамотности (фрагмент)

Содержание деятельности при выполнении контекстных заданий по видам деятельности математической грамотности		
Формулировать	Применять	Интерпретировать
— Выявление возможности формулирования ситуации, описанной в тексте, представленном в словесной/символьной/графической форме на математическом языке. — Конкретизировать неизвестные и известные величины и отношения. — Выявлять связь между неизвестными и известными величинами и отношениями. — Анализировать и понимать условия, способствующие формулированию проблемы на математическом языке, и действующий подход к её решению. — Самостоятельное создание рабочей математической модели, отражающей описанную ситуацию	— Применение общепринятых математических понятий, определений, теорем, свойств объектов в процессе решения проблем и обоснования самостоятельно полученных выводов. — Преобразование математических моделей (уравнений и неравенств, и их систем) реальных ситуаций. — Получение необходимой информации, в частности при работе с диаграммами и графиками, геометрическими моделями	— Анализ предполагающегося математического решения и полученных результатов. — Оценка полученных результатов в контексте с описанной ситуацией. — Интерпретация (соотнесение) результатов в контексте описанной ситуации (с требованием). — Самостоятельная полная аргументация (обоснование подтверждения или опровержения) с учетом описанной ситуации

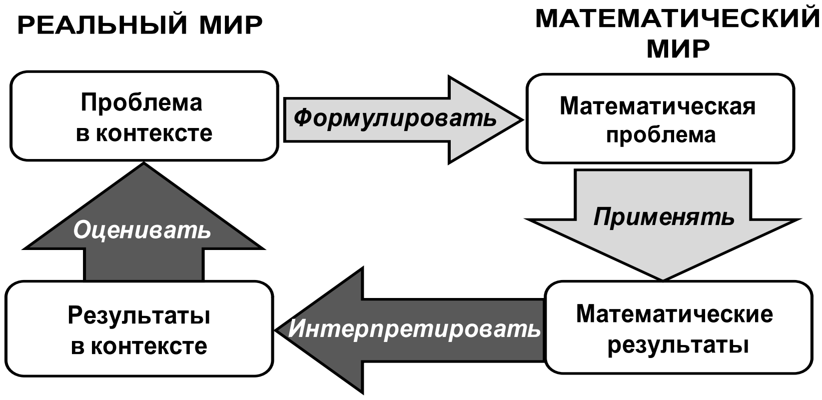


Рис. 1. Модель математической грамотности, реализованная в исследовании PISA

На модели, представленной на Рис. 1, выделены основные конструкты в концепции оценки математической грамотности и связи между ними, принятые всеми странами-участницами исследования PISA. Содержимое первого блока отражает тот факт, что математическая грамотность оценивается в контексте проблемы, которая возникает в реальном мире. Содержимое второго блока освещает природу математического мышления и совершаемого человеком самостоятельного действия, которое может быть предпринято для эффективного решения стоящей перед ним проблемы. В третьем и четвертом блоках описаны процессы, которые решающий проблему индивид использует для подготовки и конструирования решения и оценки его релевантности заданным извне условиям.

Математически образованный обучающийся должен обладать следующими навыками: уметь выявлять задачи, возникающие в реальной жизни и поддающиеся математическому решению; формулировать эти задачи на языке математики (и понимать сформулированные подобным образом); решать их с использованием математических знаний, фактов и методов; анализировать самостоятельно примененные методы решения и делать выводы об успешности выбранного подхода; интерпретировать полученные результаты в контексте исходной задачи; самостоятельно формулировать и записывать результаты решения [8].

Семенова И.Н. и Шорохов Е. А. в статье [36] приводят несколько измененные схемы структуры ФМГ, полезные для более конкретного понимания «интерпретации» математики в широком (Рис. 2) и узком (Рис. 3) смысле. В широком смысле считается, что «интерпретация — это толкование, объяснение, раскрытие смысла чего-нибудь» [41]. В узком смысле так можно назвать способность обучающегося после получения каких-либо математических результатов абстрагироваться от проблемы (задачи), соотнести и анализировать свое решение в контексте реальности, а также сформировать последовательность действий и операций с проблемой, поставленной в контексте иного рода или степени выраженности.

Рис. 2. Схема структуры ФМГ при понимании «интерпретации» математики в широком смысле

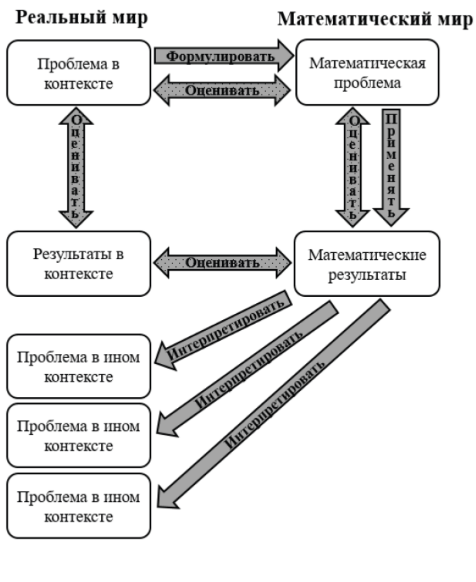


Рис. 3. Схема структуры ФМГ при понимании «интерпретации» математики в узком смысле

Рослова Л.О. в работах [30, 31] описывает компоненты, из которых складывается математическая грамотность:

1. Предметный (математический) компонент: это не весь объем знаний, входящий в Федеральную рабочую программу. Базовая математическая подготовка обучающегося стандартно включает в себя элементы функциональной математической грамотности, но в действительности она шире, поскольку является лишь основой для продолжения и углубления математического образования.

2. Деятельностный компонент: предметные знания требуют определенных общих умений, прививаемых обучающемуся ранее, без владения которыми применение знаний будет невозможным или весьма затруднительным.

3. Процессуальный (метакогнитивный) компонент: включает в себя следующие аспекты:

— готовность обучающегося к успешному взаимодействию с математической стороной его окружающего мира (и математически формулируемыми задачами по работе с наблюдаемыми в нем процессами и явлениями);

— наличие опыта поиска путей решения жизненных задач, моделирования ситуаций и переноса способов решения учебных задач на реальные задачи из окружающего мира;

— способность самостоятельно планировать деятельность разной степени комплексности, подготавливать и реализовывать рабочие алгоритмы, контролировать процесс выполнения действий, прогнозировать получаемый результат;

— наличие у обучающегося рефлексивных качеств, посредством которых могут быть обеспечены контроль и проверка результата на соответствие исходным данным и на правдоподобие, коррекция и оценка результата деятельности [42].

Дударева Н.В. и Утюмова Е.А. [13] выделили другие 4 компонента математической грамотности обучающихся: когнитивный, деятельностный, прогностический и рефлексивный (Таблица 2).

Таблица 2

Компоненты математической грамотности обучаемых

когнитивный	деятельностный	прогностический	рефлексивный
предметные математические знания, необходимые для решения задач в разнообразных практических контекстах	умения и навыки, необходимые для решения проблем средствами математики; овладение опытом интерпретации полученных результатов с учетом поставленной проблемы	эмоционально-ценностное отношение к математике и математической деятельности, понимание возможности применения математики в различных областях деятельности	анализ, контроль и оценка полученного решения, использованных методов, внесение корректировки в методы решения аналогичных задач с учетом возникших затруднений

Когнитивный компонент включает в себя совокупность математических знаний, которые человек должен уметь применять в повседневной жизни для решения различных практических и профессиональных задач. Содержание этого компонента прописано в Государственном стандарте и ясно определено для каждого уровня обучения. Таким образом, для развития математической грамотности ученики должны:

1) знать и правильно употреблять математические понятия;

2) овладеть математическим языком как (при необходимости) для общения с людьми, так и для познания и описания окружающего мира, конструирования и интерпретации простейших математических моделей;

3) усвоить математические теоремы, методы, способы и алгоритмы решения математических задач;

4) знать структуру формируемого самостоятельно доказательства (или последовательные шаги доказательства, а также применяемые при его построении аргументы), которую можно рассмотреть и реализовать при работе с теоремами или задачами на доказательство.

Деятельностный компонент включает умения и навыки, необходимые человеку для решения жизненных и профессиональных проблем при помощи математических фактов, теорем, понятий, методов. Обучающиеся должны уметь:

1) ясно понимать условие задачи, определять возможные и реальные ограничения при описании какой-либо ситуации и/или при нахождении решения, правильно и адекватно интерпретировать полученное решение в рамках предложенной ситуации и ее условий;

2) интерпретировать и отбирать примеры, показывающие связь теоретических фактов и понятий с какими-либо предметами и решением насущных жизненных ситуаций и проблем;

3) осознанно применять теорию при решении практических задач;

4) работать с математической информацией, понятиями, утверждениями, умозаключениями, применяя разные способы представления результата —в символьной, графической, словесной и кинестетической формах;

5) интерпретировать и преобразовывать информацию о реальных процессах и явлениях, переработанную и представленную в виде таблиц, диаграмм, схем, графиков;

6) строить и применять разнообразные математические модели при решении задач как теоретических, так и практических;

7) по текстовому и символьному описанию изображать геометрические фигуры;

8) аргументированно обосновывать получаемые выводы или опровергать их.

Прогностический компонент связан с эмоционально-ценностным отношением обучающихся к математике и математической деятельности, их равно как и пониманием возможности применить знания из этой сферы в различных предметных и профессиональных областях для эффективного решения жизненных проблем. Прогностический компонент содержит представления обучающихся о:

1) прикладных аспектах математики;

2) влиянии математических понятий, фактов, методов и способов решения на развитие общества в социальном плане;

3) гносеологическом характере процесса познания в математике;

4) основных этапах развития математической науки как составляющей мировой культуры;

5) культуре математической деятельности и математического мышления вообще.

Рефлексивный компонент математической грамотности включает умение осуществлять комплексный анализ, контроль и адекватную оценку полученного решения и выбранных математических методов, а также умение подстраивать систему методов решения аналогичных задач под изменения в ситуациях или возникновение новых условий. Подтвердить развитость этого компонента математической грамотности можно, когда у обучающихся наличествуют умения:

1) оценивать результаты вычислений при решении реальных задач;

2) оценивать правдоподобность результата, полученного при решении различных видов уравнений, неравенства и их систем в процессе решения таких задач;

3) выполнять примерную оценку результата данных или конструируемых числовых выражений;

4) выполнять сравнение числовых данных, полученные на основе реальных ситуаций;

5) выдвигать гипотезы о возможных представленных значениях числового ответа задачи;

6) устанавливать зависимость между величинами, представленными в задаче, и подробно пошагово планировать решение задачи;

7) выбирать и объяснять свои действия при решении задач;

8) оценивать вероятность реальных событий и явлений;

9) оценивать размеры реальных объектов окружающего мира;

10) вычленять из ряда остальных задачи, имеющие несколько способов решения, или сопряженные с недостачей или излишками данных в условии;

11) регулировать, корректировать и рефлексировать собственную деятельность и ее итоги.

Подведем итог. Раскрыта сущность общей функциональной и функциональной математической грамотности у обучающихся. В результате анализа источников выделены компоненты характеристики математически образованного выпускника, содержание деятельности ФМГ, модель и компоненты математической грамотности. Найдена актуальная и достаточно полная дефиниция функциональной математической грамотности.

Формирование и оценка ФМГ напрямую связаны — ни одна из этих категорий не может быть достигнута без другого. Именно вопросам формирования и оценивания ФМГ посвящен следующий параграф.

1.2. Средства формирования и оценивания функциональной математической грамотности у обучающихся

Существуют следующие сравнительные международные исследования качества школьного образования: TIMSS, PISA и TIMSS-Advanced. Одним из основных направлений всех трех исследований является оценка достижений школьников разных стран в естественнонаучных дисциплинах. В исследовании TIMSS, которое проводится каждые 4 года, оценивается качество естественнонаучного образования обучающихся 4-х и 8-х классов. В исследовании PISA (проводится каждый 3 года) проверяется так называемая естественнонаучная грамотность 15-летних обучающихся. В исследовании TIMSS-Advanced каждые 7 лет тестируются достижения обучающихся последнего класса школы, изучающих физику на повышенном, или профильном уровне [22].

По мнению специалистов [10], наиболее, хоть и относительно, объективный и признанный мониторинг оценки качества школьного образования на текущий момент раз в три года проводит Организация экономического сотрудничества и развития. Работа при этом заключена в рамки уже упоминавшегося выше международного сопоставительного исследования PISA. Положение России в этом исследовании — на удовлетворительном уровне, хотя есть и более «слабые» позиции. Начиная с 2000 г. участие стран в этом исследовании становится куда более интенсивным (от 32 их число достигает более чем 80), что нельзя не счесть результатом того, что значение оценки PISA повышается для целого ряда национальных образовательных систем. Сегодня PISA — это единый и постоянно совершенствуемый и уточняемый способ исследовать эффективность национальных образовательных систем. Главное отличие задач PISA от аналогичных заданий ЕГЭ и ОГЭ заключается в том, что при выполнении нестандартных запросов составители проверяют не заученный предметный материал, а владение обучающимися общими межпредметными компетенциями [4].

В 2022 году общероссийская «Оценка по модели PISA»[4] проводилась по технологии импортозамещения [27]. Результаты исследования при этом по-прежнему сопоставимы с итогами международного исследования PISA-2018, если учитывать традиционные для его направления оценки: читательской, математической и естественно-научной грамотности. В исследовании приняли участие 265 образовательных организаций (89 сельских и 176 городских) из 43 субъектов Российской Федерации.

В «Оценке по модели PISA» выделяют 6 уровней для каждого вида грамотности. Пятый и шестой уровни в каждом перечне – самые высокие, и их достижение указывает на наиболее высокие компетенции обучающихся; вто-

[4] Акт министерств и ведомств "Приказ Рособрнадзора N 577, Минпросвещения России N 320 от 11.05.2022 "О внесении изменений в Методологию и критерии оценки качества общего образования в общеобразовательных организациях на основе практики международных исследований качества подготовки обучающихся, утвержденные приказом Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки и Министерства просвещения Российской Федерации от 6 мая 2019 г. N 590/219"" от 11.05.2022 № 577/320 // Судебные и нормативные акты РФ. 2022 г.

рой уровень при этом является пороговым, так что его недостижение свидетельствует о недостаточно развитых базовых умениях – то есть, можно сказать, общей учебной неуспешности. Чем выше доля обучающихся, которым не удается преодолеть второй пороговый уровень, тем хуже отдельно взятая образовательная система предотвращает низкие результаты систематически [32, 50].

Общероссийская оценка по модели PISA показала, что пороговый уровень математической грамотности не смогли преодолеть 16% обучающихся.

Разница между квартилями лучших и худших результатов в этой же области, согласно полученным по всей России данным, составила 210 баллов.

Исследование также помещает 33% школ в зону рисковых ОО (подразумевается, что в этой категории ОО постоянна высокая концентрация обучающихся из семей с низким уровнем социально-экономического и культурного статуса, Таблица 3).

По данным 2022 года резильентными, или находящимися в зоне риска, но показывающими стабильно высокие результаты по всем видам грамотности, были сочтены 18 ОО (7%). Результаты резильентных школ обычно оказываются выше, чем в похожих школах с сопоставимым уровнем влияния приблизительно тех же факторов риска.

Таблица 3

Результаты общероссийской оценки по модели PISA

<table>
<tr><td colspan="2">Математическая грамотность</td></tr>
<tr><td>Балл</td><td>Место</td></tr>
<tr><td>503</td><td>17</td></tr>
<tr><td colspan="2">Результаты ОО, расположенных в городах и сельских населенных пунктах</td></tr>
<tr><td>Город</td><td>Село</td></tr>
<tr><td>502</td><td>494</td></tr>
<tr><td colspan="2">Доля участников, не преодолевших границу порогового уровня</td></tr>
<tr><td colspan="2">16%</td></tr>
</table>

Окончание таблицы 3

Разница между 25% лучших и 25% худших результатов[5]		
Q1	Q4	dif
402	612	210
Доля ОО с низкими результатами	18%	
Доля ОО с результатом 500 баллов и выше по всем видам грамотности	23%	
Доля рисковых ОО	33%	
Доля резильентных ОО	7%	

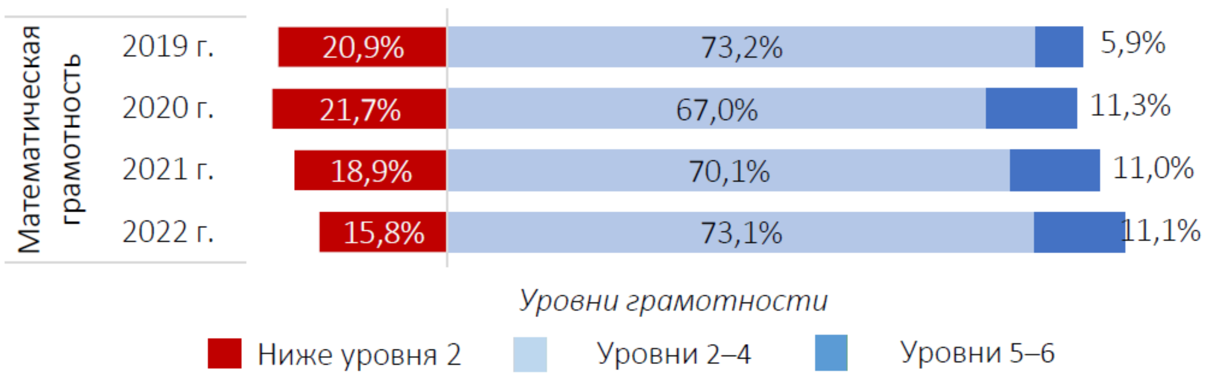


Рис. 4. Динамика результатов обучающихся по уровню математической грамотности

В целом за 2022 год доля обучающихся, достигших высоких результатов по математической грамотности (5 и 6 уровни), составила 11%. Вместе с этим было отмечено, что снижение доли обучающихся, продемонстрировавших неспособность достичь базового уровня владения математической грамотностью (Рис. 4).

Исследование [45], в котором взрослые сравнивались с 15-летними обучающимися, участвовавшими в исследовании PISA, показало, что средний уровень математической грамотности у взрослых был на уровне обучающихся средней школы. Можно сделать вывод о том, что учителя при разработке или подборе задач с заданиями для обучающихся должны учитывать применимость для текущего и послешкольного уровня образованности [47].

[5] Q1 -средний балл 25% худших результатов, Q4 – средний балл 25% лучших результатов, dif – разница между Q1 и Q4.

Существует также близкое, но несколько отличающееся от PISA международное исследование качества именно математического и естественно-научного образования, или TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) — международное сопоставительное исследование качества и тенденций в математическом и естественно-научном образовании. Оно проводится Международной ассоциацией по оценке учебных достижений (International Association for the Evaluation of Educational Achievement — IEA). В роли национального центра проведения исследования как TIMSS, так и PISA в России выступает ФГБУ «Федеральный институт оценки качества образования».

Результаты TIMSS-2023 будут опубликованы в декабре 2024, поэтому рассмотрим результаты, полученные до 2019.

В 2019 году в исследовании среди обучающихся 8 классов участвовали 39 стран мира, в том числе 43 субъекта РФ. Результаты приведены в Таблице 3 [1]. Результаты российских обучающихся 8 классов в области именно математики существенно выше средних значений, зафиксированных на международной шкале TIMSS (Таблица 4).

Таблица 4

Результаты Российской Федерации в исследовании TIMSS-2019 (фрагмент)

класс	направление	количество баллов (по 1000-балльной шкале)	Среднее международное значение шкалы TIMSS	Место РФ среди других стран-участниц (по количеству баллов)
8 класс	математическая грамотность	543	500	6

Согласно итогам TIMSS, российские восьмиклассники постоянно демонстрируют действительно высокий уровень математической подготовки. Погодичное сравнение результатов российских восьмиклассников показывает, что результаты значительно выросли в 2011 г. В целом уровень подготовки школьников продолжал расти вплоть до 2019 года (Рис. 5) [22].

Рис. 5. Изменение результатов российских обучающихся по математике по циклам исследования TIMSS (8 класс)

Тенденция повышения результатов явно проявилась в 2011 г., когда в российской основной школе начал осуществляться переход на новые стандарты. Уклон в сторону функциональной математической грамотности стал заметен в обновленных версиях ФГОС для начальной и основной школы, которые были разработаны и внедрены в период с 2010 по 2014 годы. Таким образом, функциональная математическая грамотность стала ключевой составляющей в современном подходе к обучению математике в рамках ФГОС начальной и основной школы с начала 2010-х годов.

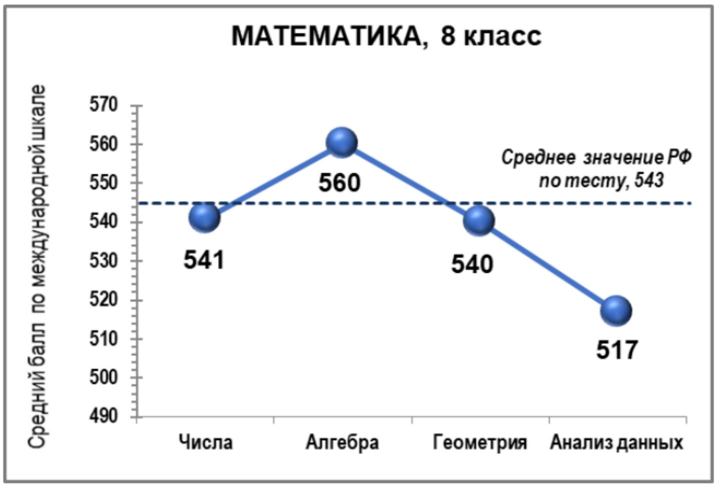


Рис. 6. Средние баллы российских обучающихся 8-х классов по содержательным областям теста

В ФГОС ООО 2014 г.[6] относительно предметных результатов по предмету «математика» изложено следующее: «…овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей…».

В структуру математической части теста TIMSS-2019 (8 класс) входили содержательные области, посвященные работе с числами, алгебре, геометрии и анализу данных.

В 2019 году самый высокий балл по разделу «Алгебра», изучению которого во время получения школьного образования стандартно уделяется наибольшее внимание, составил 560. Баллы по школьному разделу «Геометрия» (540) как-либо существенно не отличаются от полученного теми же обучающимися общего среднего балла (543) (Рис. 6) [22].

В 2019 году восьмиклассники России получили следующие баллы по трем видам деятельности — 550 («знание»), 543 («применение»), 536 («рассуждение») (Рис. 7). Средний балл по «знанию» существенно выше общего среднего балла 543, а по «применению» с ним совпадает, в то время как балл по «рассуждению» существенно ниже среднего по стране. Следует обратить внимание на то, что это положение дел соответствует не раз отмечавшемуся недочету математической подготовки обучающихся российских школ — неумению верно записать решение или обосновать полученный ответ. Таким образом, положительные качества математической подготовки выпускников начальной школы не поддерживаются и даже нивелируются при их переходе в основную школу [22].

[6] Акт министерств и ведомств "Приказ Минобрнауки России от 17 декабря 2010 г. № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»" от 17.10.2010 № 1897 // Российская газета. 03.02.2011 г. № 5154.

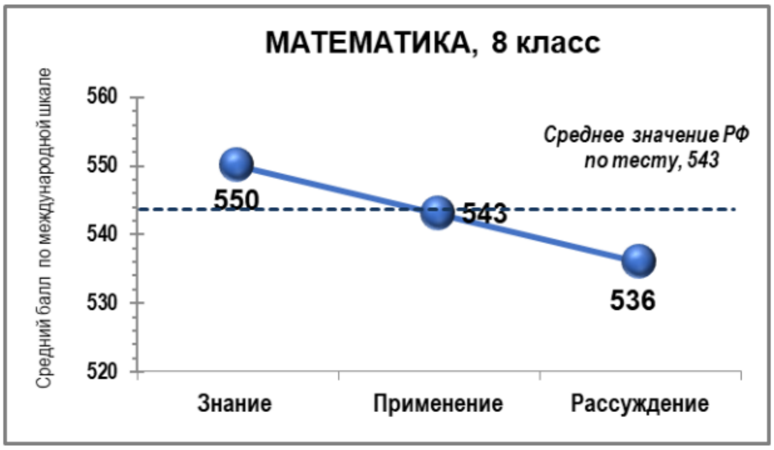


Рис. 7. Средние баллы российских обучающихся 8-х классов по видам деятельности

Рослова Л.О. в статье приводит пример сюжетной задачи, которая упомянута в одном из пособий [5, 42] в контексте функциональной математической грамотности: «Сергей поймал 20 рыб и сложил их в ведро. Пока он складывал удочки, десятую часть всех рыб утащила кошка. На сколько уменьшилось число рыб в ведре?» [30]. Здесь в качестве задачи, формирующей функциональную грамотность, обучающимся предлагается типичная текстовая задача на отработку понятия «доля».

Рослова задается вопросом: почему бы не предложить обучающимся жизненную ситуацию в виде некоторого сюжета? Пусть дети сами вычленяют математические сущности в изложенных им условиях и самостоятельно составляют задачу. Ещё одна причина того, что текстовые задачи часто не являются средством формирования ФМГ в том, что они на текущий момент сильно типизированы: обучающийся понимает, каким будет вопрос среднестатистической задачи, уже когда начинает читать самое первое ее предложение [29].

Мы полагаем, что в обучении есть смысл использовать отличающиеся от типичных для российского дидактического метода задачи-ситуации, дублирующие сюжеты, которые обучающийся может встретить в реальной жизни. «Банка» таких задач не существует и, вероятно, не может быть создано: это их типизирует. Тем не менее, чтобы двинуться дальше в решении этой проблемы и разработке актуальных подходов к этому вопросу, видится логичным использовать предложения из статьи [40]:

1) активное погружение обучающихся в реальные ситуации;
2) фокусировка на моделировании как стратегии, которой нужно обучать;
3) фокусировка на метапредметных результатах школьного образования;
4) побуждение обучающихся к решению задач с помощью разных подходов и развитие у них максимально возможной независимости в этом отношении.

В рамках концепции направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021 были выделены контексты задач и их математическое содержание [21] (Рис. 8). **Контексты** проблем реального мира: личный, профессиональный, общественный, научный. **Математическое содержание**: количество, неопределенность и данные, изменение и зависимости, пространство и форма.

Остановимся более подробно на **контекстах** проблем реального мира [49]. В рад важнейших аспектов математической грамотности входит использование математических познаний для решения задач с определенным контекстом. Контекстом здесь договоримся считать конкретный аспект мира, в котором возникают замеченные человеком проблемы. Решение, какой метод работы с проблемой стоит избрать, часто зависит именно от наблюдаемого контекста.

Рассмотрим типы контекстов, с которыми можно было бы работать при составлении целевых задач для повышения функциональной математической грамотности.

Рис. 8. Концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021

Личный. Проблемы категории личного контекста связаны с деятельностью человека, его семьи или группы людей. К личным проблемам относятся (но не ограничиваются ими) вопросы приготовления пищи, покупок, игр, здоровья, транспорта, спорта, путешествий, составления расписания дня (недели, месяца и т.д.) и личных финансовых решений.

Профессиональный. Проблемы этой категории лежат в области труда и могут включать (но не ограничиваться ими) измерение, расчет стоимости и заказ материалов для строительства, все, что связано с заработной платой, контроль качества, решения, ассоциируемые с работой. Профессиональный контекст имеется у задач, выполняемых представителями любого типа работ — от неквалифицированного труда до самых высоких ступеней карьеры в разных областях, — хотя подразумеваемые предметы должны быть доступны для обучающихся основной школы.

Общественный. Проблемы, отнесенные к категории общественного контекста, касаются общества любого рода и величины. Они могут касаться (но, конечно, опять-таки не ограничиваться ими) системы голосования, общественного транспорта, рекламы, госполитики, статистики, экономики и демографии. Обычно отдельные люди ощущают вовлеченность в эти вопросы на личном уровне, но проблемы такого контекста, ориентированные все же на более крупный общественный масштаб.

Научный. Аналогичные проблемы из категории научных связаны с применением математики для познания мира природы, равно как и с наукой и техникой вообще. Конкретные вопросы могут включать (но не ограничиваться таковыми) области климата, экологии, медицины, наук о космосе, генетики, измерений вообще и собственно математических разновидностей. Внутриматематические вопросы, то есть такие, где все составляющие относятся именно к миру математики, также входят в научный контекст.

ФМГ включает в себя навыки нахождения и истолкования математической или могущей быть представленной в таком виде информации, а также решения математических вопросов и задач в разнообразных реальных ситуациях. Информация, которая поступает человеку в рамках такой задачи или которую ему может быть нужно собрать, может быть представлена в любом виде: графики, цифры, таблицы, формулы, диаграммы и т.д. Тем самым нарабатывается практика решения проблем в реальной жизни посредством использования математической информации [43].

Разберем **математическое содержание** более подробно [13]:

Количество. Разнообразные свойства/характеристики объектов и присущие их деятельности закономерности обычно выражаются в количественных показателях, поэтому при рассмотрении и анализе явлений и объектов понятие количества является одним из самых распространенных и полезных. Исследование количественных свойств предметов требует наличия у человека установившихся и достаточно полных представлений о сущности измерений, счета, величин, единиц измерения и числовых закономерностей. Немалая доля того, что мы можем назвать математической грамотностью в области «Количество», составляют знания о числе и умения разнообразными способами вычислять нужную причину и оценивать адекватность конечного результата.

Неопределенность и данные. В науке, технологии и повседневной жизни неопределенность присуща результатам опросов, научных и метеорологических прогнозов, природных явлений и ситуаций на экономическом рынке. Исследования неопределенности подразумевает умение проводящих их распознать имеющуюся неопределенность, оценить шансы возникновения того или иного события или фактора, а также представить смысл и потенциальное количественное выражение возможных вариаций. Ключевыми понятиями в области неопределенности и анализа данных являются представление, интерпретация данных, оценка выводов.

Изменение и зависимости. Зависимости (временные ли, постоянные ли) между объектами и обстоятельствами возникают всегда; они присущи как естественному, так и воображаемому миру. Для описания и предсказания изменений таких зависимостей нужно уметь распознавать самые базовые типы изменений и составлять их модели их с помощью соответствующих функций, уравнений, неравенств, осуществлять интерпретацию и перевод из одних разнообразных форм представления информации в другие, наиболее подходящие по контексту.

Пространство и форма. Чтобы приступить к исследованию окружающего мира и грамотно довести его до логического конца, необходимы оценка расположения и ориентации разнообразных явлений и предметов, а вместе с тем и изучения их свойств через призму геометрических знаний и фундаментальных представлений о пространстве. Геометрия в этот момент превращается в универсальный инструмент, соединяющий в себе методы работы с пространственным воображением, измерениями и алгебраическими вопросами.

Существенный аспект математической грамотности в этой области составляют формулы измерения геометрических величин, понимание схем, чертежей и рисунков, создание и чтение разнообразных карт, трансформация форм из одной в другую, интерпретация объемных изображений, построение геометрически правильных и/или отвечающих необходимому описанию фигур.

Разделы математического содержания, сопряженные с понятием ФМГ, соответствуют разделам планируемых предметных результатов в федеральной рабочей программе: количество (числа и вычисления), изменения и зависимости (алгебраические выражения, графики функций), пространство и форма, неопределенность и данные (представление данных и описательная статистика, вероятность) [6].

Дударева Н.В. и Утюмова Е.А. [13] также выделили частнометодические принципы, которые обуславливают конструирование содержания обучения математике и общеуровневую организацию процесса обучения, в ходе которого формируется функциональная математическая грамотность:

1. Принцип модульности — согласно ему ожидается выделение в программе фундаментальных модулей и алгоритмов, которые школьники должны изучить за каждый из этапов формирования у себя основной математической грамотности.

2. Принцип согласованности, упомянутый следующим, заключается в согласовании уровней того, насколько полно и строго проходит изучения математических понятий и фактов, с этапами формирования ФМГ, а также в согласованном установлении связей между предметами пройденной теории и внутри них.

3. Наконец, принцип активности и практической направленности обучения предполагает, что в программу прицельно будут включены задания, которые ассоциируют свойственные математике объекты и понятия с решения проблем окружающей жизни и сферой более конкретной деятельности обучаемых.

Выводы по Главе 1

1. Анализ литературных источников по избранной теме исследования позволил привести понятие функциональной математической грамотности к более полному виду. В рамках настоящего исследования по итогам изучения изложенных выше аргументов решено принять следующее определение **функциональной математической грамотности** — *комплексная способность человека продуктивно применять усвоенные математические знания, умения, навыки и компетенции для решения различных задач реального мира, успешного функционирования в обществе и саморазвития в течение жизни*.

2. Анализ литературных источников также позволил конкретизировать содержание деятельности в компонентах математической грамотности, а также подробно описать компоненты МГ.

3. Анализ литературных источников позволил проанализировать результаты международных исследований PISA и TIMSS, а также выделить причины изменения результатов.

4. Подробно описаны контексты задач реального мира и их математическое содержание. Сделан вывод о том, что особое внимание в работе будет уделено содержанию «Пространство и форма».

Глава 2. Формирование функциональной математической грамотности обучающихся основной общей школы с использованием экстремальных задач с геометрическим содержанием

2.1. Дидактические принципы построения заданий к экстремальным задачам с геометрическим содержанием для формирования функциональной математической грамотности обучающихся

Вопрос того, как следует вводить обучающихся в тему экстремальных математических задач — в контексте современного образования обретает все большую актуальность. Эти задачи занимают поистине важное место в цепочке, приводящей к формированию у обучающихся функциональной математической грамотности. В этом разделе работы мы рассмотрим основные дидактические принципы, на которые следует опираться при стремлении к тому, чтобы строить задания к экстремальным задачам с геометрическим содержанием как можно более продуманно и эффективно. Ключевые особенности этих принципов состоят в направленности на развитие аналитического мышления, логической гибкости и способности к применению математических знаний в реальной жизни. Разрабатывающие такие задания стремятся к обеспечению обучающихся образовательной средой, которая способствовала бы не только обретению самих по себе математических знаний, но и открытию возможностей к их практическому применению опять-таки для решение, быть может, еще более сложных задач из множества областей жизни. Рассмотрение дидактических принципов построения таких заданий позволит лучше понять и оценить их эффективность для уже рассмотренного нами выше в подробностях формирования функциональной математической грамотности — процесса, столь важного для обучающихся всех современных школ нашей страны.

Экстремум, множественное число экстремумов, в исчислении, любая точка, в которой значение функции является наибольшим (максимальным) или наименьшим (минимальным). Существуют как абсолютные, так и относительные (или локальные) максимумы и минимумы. При относительном максимуме значение функции больше, чем ее значение в непосредственно смежных точках, в то время как при абсолютном максимуме значение функции больше, чем ее значение в любой другой точке интересующего интервала. При относительных максимумах внутри интервала, если функция гладкая, а не пиковая, ее скорость изменения, или производная, равна нулю. Однако производная может быть равна нулю в точке, где функция не имеет ни максимума, ни минимума, как в случае функции x^3 при $x = 0$. Один из способов определить это — вернуться к исходному определению и найти значение функции в непосредственно смежных точках [28].

Слово «оптимальный» происходит от латинского optimus, то есть исходно означает «наилучший, совершенный». Для того чтобы найти наиболее оптимальную из всех представленных возможностей, приходится решать задачи на отыскание максимума или минимума, т. е. наибольших или наименьших значений каких-либо величин. Оба эти понятия — максимум и минимум — объединяются термином «экстремум» (от латинского extremum, означающего «крайнее»). Поэтому, собственно, за задачами на отыскание максимума или минимума и закрепилось название экстремальных [7].

Оптимизационная математическая задача — это задача нахождения наилучшего решения из множества возможных.

В средней школе оптимизационные задачи часто рассматриваются в упрощённом виде и с использованием доступных методов. Примеры таких задач включают нахождение максимума или минимума функции на определённом интервале, оптимизацию геометрических параметров или ресурсов, и решение задач из экономики и повседневной жизни.

Основные компоненты любой оптимизационной задачи включают:

1. Целевая функция: функция, которую необходимо минимизировать или максимизировать.

2. Переменные: вектор переменных x, значения которых нужно определить для достижения оптимального значения целевой функции.

3. Ограничения: условия, которым должны удовлетворять переменные.

Обычным способом решения задач по нахождению экстремумов является использование дифференциального исчисления. Но во многих задачах из различных подобластей математики нахождение экстремумов не требует дифференциального подхода.

Бесспорно, следует подчеркнуть, что даже не имеющий достаточных знаний или не приобретший опыт дифференциального и интегрального исчисления человек в целом способен достичь правильного решения таких задач с привлечением обширных знаний по различным иным предметам; иногда для этого требуется более простой или короткий метод, и его нельзя не признать рабочим. Однако следует отметить, что альтернативные методы решения, — а в их число входит использование арифметических и геометрических средних (AGM), пусть и не обсуждавшиеся нами ранее в настоящей работе, — оптимальны только для нескольких (частных) случаев. Математическое исчисление же можно признать куда более надежным подходом, поскольку благодаря ему решение находится в большинстве случаев. Признаем: первый метод требует элементарных геометрических методов, доступных, как мы ожидаем, большому числу школьников, в то время как второй подразумевает более основательный подход — то есть предварительные расчеты, привлечение тригонометрии и исчисления в качестве дополнительных требований, которые большинство старшеклассников, возможно, за стандартный курс геометрии просто не приобрели. Кроме того, комбинирование различных методов в решении задач и эксплицирование этого в заданиях может дать школьникам (а впоследствии и студентам) более широкий взгляд на математику как на всеобъемлющую и весьма полезную для дальнейшего познания мира дисциплину, обеспечивая более прочные связи между ее отраслями [2, с. 490] и другими аспектами знания, с которыми она способна взаимодействовать.

В процессе решения большей части экстремальных задач широко и удачно используются эвристические приёмы, которые в отличие от алгоритмических могут подсказать путь решения предлагаемых задач.

От чего зависит действительно успешное развитие мышления и решение задач по математике? Во многом — от того, насколько учитель мотивирован и способен создавать и вызывать соответствующие стимулы в процессе преподавания и обучения, подчеркивая при этом в общении с обучающимися даже такую категорию, как красота математики.

Пример постановки и решения оптимизационной геометрической задачи:

В коробку (с крышкой), представляющую собой куб со стороной единичной длины, поместили два шара. Каков наибольший объём, занимаемый шарами? Каковы их радиусы? (Рис. 9)

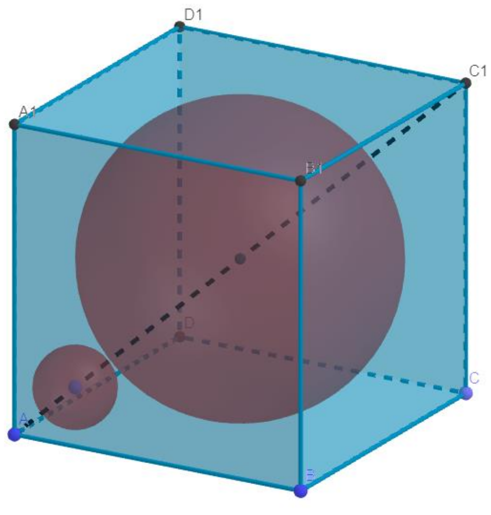


Рис. 9. Два шара, помещенные в куб

Решение:

1. Максимальный объем получим при наибольшем удалении шаров друг от друга, т.е. центры шаров должны лежать на диагонали куба.

2. Пусть R_1 и R_2 радиусы шаров. Поскольку шары касаются трех граней куба, то расстояния от их центров до ближайших вершин равны соответственно:

$L_1 = R_1\sqrt{3};$

$L_2 = R_2\sqrt{3}.$

Шары касаются друг друга, поэтому расстояние между их центрами равно:

$L = R_1 + R_2.$

Поскольку центры шаров лежат на диагонали куба, то:

$L_1 + L + L_2 = \sqrt{3};$

$R_1\sqrt{3} + R_1 + R_2 + R_2\sqrt{3} = \sqrt{3};$

$(R_1 + R_2)\left(\sqrt{3} + 1\right) = \sqrt{3};$

$$R_1 + R_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \equiv C = const.$$

Ограничение для R_1 и R_2:

$$0 < R_1, R_2 \le \frac{1}{2}.$$

3. Сумма объемов шаров равна:

$$V = \frac{4}{3}\pi(R_1^3 + R_2^3) = \frac{4}{3}\pi(R_1 + R_2)(R_1^2 - R_1R_2 + R_2^3) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi(R_1 + R_2)((R_1 + R_2)^2 - 3R_1R_2) = \frac{4}{3}\pi C\left(C^2 - 3R_1(C - R_1)\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi C^3 - 4\pi C R_1(C - R_1) = \frac{4}{3}\pi C^3 + 4\pi C R_1(R_1 - C) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi C^3 + 4\pi C(R_1^2 - CR_1) = \frac{4}{3}\pi C^3 + 4\pi C\left(\left(R_1 - \frac{C}{2}\right)^2 - \frac{C^2}{4}\right) = max.$$

4. Максимум достигается при наибольшем значении R_1:

$$R_1 = \frac{1}{2};$$

$$R_2 = C - R_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

$$V=\frac{4}{3}\pi(R_1^3+R_2^3)=\frac{4}{3}\pi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)=\frac{\pi}{6}\left(1+8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(27-15\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{2}\left(9-5\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ и $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$; $V_{max}=\frac{\pi}{2}(9-5\sqrt{3})$.

Представленная задача является типичной экстремальной задачей с геометрическим содержанием. Включение данной задачи в контекст проблем реального мира и формулирование дополнительных заданий будут способствовать формированию функциональной математической грамотности.

Отбор и (или) самостоятельное конструирование задач (заданий) для системы задач для формирования ФМГ является новым профессиональным действием для учителя математики и вызывает сегодня серьезные затруднения [34, 35].

Разберём схему последовательности мыслительных операций и действий, которые должен совершить обучающийся при решении задачи для формирования функциональной математической грамотности. Элементы, представленные на Рис. 1, были проанализированы в [36].

Проблема в контексте. Проблема реального мира, обычно сформулированная в виде вопроса, разрешить которую нужно, решив задачу.

Математическая проблема. Обучающемуся нужно научиться распознавать, проверять и реализовывать возможность использовать математику оптимальным для заданной ситуации способом, то есть перевести проблему из «реального мира» в «мир математики». Процесс перевода, согласно схеме, и есть ***формулирование*** математики.

Математические результаты. На данном этапе обучающийся должен ***применить*** имеющиеся знания и умения в области математики, например, использовать теоремы, формулы, производить вычисления, строить графики или таблицы.

Результаты в контексте. Здесь необходимо ***интерпретировать*** полученный математический результат обратно в контекст задачи. Обучающийся должен определить: все ли условия были учтены при решении и обосновать ход своего решения.

На последнем этапе обучающемуся необходимо ***оценить*** — не противоречит ли ответ логике реального мира и соответствует ли поставленной проблеме в вопросе задания.

На основе данных суждений можно выделить принципы построения заданий, способствующих формированию ФМГ:

1. Задания должны быть основаны на реальных ситуациях из повседневной жизни, профессиональной деятельности или науки, чтобы обучающиеся могли видеть применение математики в различных контекстах.
2. Задания должны быть структурированы таким образом, чтобы обучающиеся могли видеть последовательность шагов для решения проблемы на всех этапах.
3. Задания должны включать различные типы задач, от простых до более сложных, чтобы развивать математические навыки обучающихся.
4. Задания могут быть интегрированы с другими предметами, чтобы продемонстрировать связь математики с другими областями знания.
5. Задания могут содержать открытые вопросы, которые могут иметь несколько правильных способов решения или требовать обоснования выбора.

Решение задачи должно включать этапы формулирования проблемы на математическом языке, применения математических знаний, интерпретации математического решения обратно на язык реального мира и оценки полученных результатов на соответствие логике и поставленной проблеме в задании.

Слепухин А.В. выделил связь функциональной математической грамотности с результатами обучения, где «понимание роли математики в мире соответствует личностному результату, способность проводить математические рассуждения — метапредметному, а использование математических понятий для описания и объяснения явлений — предметному результатам» [38]. Данная связь показывает, что при формировании компонентов функциональной математической грамотности, одновременно формируются компоненты личностных, метапредметных и предметных результатов.

2.2. Разработка совокупности экстремальных задач с геометрическим содержанием с заданиями для формирования функциональной математической грамотности

Приведем примеры экстремальных задач с геометрическим содержанием с заданиями для формирования функциональной математической грамотности таким образом, чтобы на каждый *контекст* приходились задачи различного уровня сложности (низкий, средний и высокий). Отметим также, что уровень сложности может быть повышен дополнительным *заданием* к задаче.

Для отнесения задачи к одному из уровней сложности разработаем таблицу дескрипторов, используя различные критерии (Таблица 5).

Таблица 5

Дескрипторы уровней сложности задач

критерий	**низкий уровень сложности**	**средний уровень сложности**	**высокий уровень сложности**
количество переменных	1 переменная	2-3 переменные	более 3 переменных
методы решения	метод решения очевиден	нужно сделать выбор из 2-3 возможных методов решения	метод решения не очевиден; необходимо исследование
контекст задачи	простые практико-ориентированные задачи	задачи из реальной жизни с небольшим числом параметров	комплексные задачи с большим числом параметров
необходимое время на решение для «среднего» ученика	до 5 минут	5-10 минут	более 10 минут

Уровень сложности задачи можно определять и на основе характеристик заданий из Банка заданий по математической грамотности, т.к. часть задач для совокупности взята оттуда [14-19].

В дополнительном комментарии к задачам укажем, на формирование какого компонента математической грамотности она направлена. Компоненты математической грамотности, выделенные Дударевой Н.В. и Утюмовой Е.А. [13]: когнитивный, деятельностный, прогностический, рефлексивный (см. 1.1.)

Личный контекст

Задача 1. Переезд

Семья Ксении переезжает.

Они могут выбрать один из двух размеров грузовиков для аренды. Размеры внутренней части кузова указаны в таблице ниже. Все стены и пол грузового отсека представляют собой прямоугольники.

Размеры внутренней части кузова

Размер грузовика	Глубина	Ширина	Высота
А	4 м	2 м	2 м
Б	6,6 м	2,3 м	2,3 м

Размеры коробки

Размер коробки	Длина	Ширина	Высота
Маленькая	0,4 м	0,3 м	0,3 м
Средняя	0,5 м	0,5 м	0,5 м
Большая	0,5 м	0,5 м	0,75 м

Задание 1. Семья Ксении решает арендовать грузовик А. Какое наибольшее количество коробок могло бы поместиться в грузовик А? Запишите решение и ответ.

Комментарий. Уровень сложности задачи — низкий. Компоненты ФМГ: когнитивный и деятельностный. Для решения задачи обучающимся необходимо иметь представления об измерениях прямоугольного параллелепипеда.

Задача 2. Велосипедное колесо

Велосипедное колесо состоит из жесткого металлического обода, втулки со спицами и покрышки с камерой.

Когда владельцу нужно приобрести велосипедные покрышки, их размер можно проверить по наружному диаметру металлического обода велосипедного колеса. Чтобы провести измерения правильно, на обод перед этим монтируется велосипедная покрышка с камерой.

Обод велосипедного колеса может иметь диаметр 10, 12, 16, 18, 20, 24, 26, 27,5, 28 или 29 дюймов (1 дюйм = 2,54 см).

Ниже показаны 4 вида велосипедов с разными вариантами диаметров обода колеса (Рис. 10).

Рис. 10. Виды велосипедов

Задание 1. Определите, какой велосипед может пройти наибольшее расстояние за 1 полный оборот обода? Объясните свой ответ.

Задание 2. Велосипед двигался в течение одного и того же времени с одинаковой постоянной скоростью. Обод какого вида велосипеда сделает наибольшее количество оборотов во время езды? Объясните свой ответ.

Комментарий. Задача имеет средний уровень сложности. У обучающихся проверяется умение сравнивать длины окружностей, а также уметь учитывать пропорциональность величин. Компоненты ФМГ: когнитивный и деятельностный.

Задача 3. Покраска пола в гараже

На плане (Рис. 11) изображен дачный участок. Сторона каждой клетки равна 2 м. Владельцы придали участку прямоугольную форму. Въезд и выезд на эту территорию возможен лишь через единственные ворота. При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Жилой дом (3) построили в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай, расположенный рядом с гаражом, и теплица, для удобства построенная прямо на территории огорода (сам огород при этом отмечен цифрой 2).

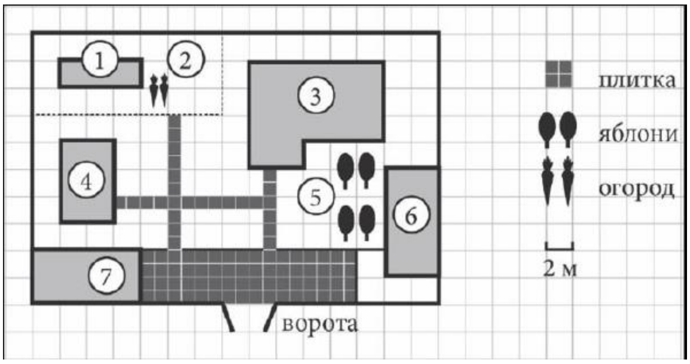


Рис. 11. План дачного участка

Задание 1. Хозяйка решила покрасить пол в гараже в светло-серый цвет. Краска продается в банках по 900 г. В инструкции на банке приведен расход краски (Рис. 12). Определите, какое минимальное количество банок краски нужно приобрести, чтобы покрасить пол в гараже в 2 слоя?

Расход:
На один слой требуется от 180 до 200 г/м^2 эмали в зависимости от её цвета, типа, состояния поверхности.
Время высыхания:
Каждого слоя при температуре (20±2) °С и относительной влажности воздуха (65±5)% — не более 24 часов.
Хранение:
В плотно закрытой, герметичной таре вдали от отопительных приборов, предохраняя от влаги и прямых солнечных лучей.

Рис. 12. Инструкция к краске

Задание 2. Какие действия Вы выполняли и какие данные использовали для нахождения оптимального варианта?

Задание 3. Соотнесите выделенные Вами действия и критерии выбора оптимального варианта с возможностью их применения к следующим жизненным ситуациям:

1) побелка потолка в комнате;
2) оклеивание стен обоями;
3) установка натяжного потолка;
4) расчет количества шифера для двухскатной крыши.

Комментарий. Уровень сложности задачи — низкий. Но добавление задания 3 переводит уровень сложности на средний. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный, прогностический (задание 3), рефлексивный (задание 2). Для решения задачи обучающимся необходимо уметь вычислять площадь прямоугольника.

Решение.

По данным схемы участка можно определить, что гараж имеет размер 8 на 4 м. Площадь пола в гараже: $8 \cdot 4 = 32$ м^2.

Минимальный расход краски, судя по данным на банке равен 180 г/м^2.

Потребуется краски: $180 \cdot 32 \cdot 2 = 11520$ г. В банке 900 г краски, значит потребуется $11520 : 900 \approx 12{,}8$. Значит потребуется 13 банок краски.

Возможный ответ на задание 2:

Для нахождения оптимального варианта использовались следующие данные: длина и ширина гаража; условие о том, что необходимо покрасить пол в 2 слоя; расход краски; масса краски в одной банке.

Действия, выполняемые, для нахождения оптимального варианта: вычисление площади прямоугольника (пол в гараже), умножение и деление натуральных чисел.

Ответ на задание 3:

1. Побелка потолка в комнате: вычисление площади прямоугольника, умножение и деление натуральных чисел. Условия: длина и ширина комнаты; расход материала для побелки; масса материала в одной банке.

2. Оклеивание стен обоями: вычисление площади прямоугольника, умножение и деление натуральных чисел. Условия: длина и ширина комнаты, *а также высота потолка*; площадь покрытия поверхности одним рулоном обоев.

3. Установка натяжного потолка: вычисление площади прямоугольника. Условия: длина и ширина комнаты. *Другие условия здесь учитывать не нужно, так как полотно для потолка изготавливается по особому стандарту*.

4. Расчет количества шифера для двускатной крыши: вычисление площади прямоугольника; умножение и деление натуральных чисел. Условия: *размеры каждого ската крыши; площадь одного листа шифера*.

Задача 4. Ремонт комнаты [17]

Семья Натальи делает ремонт в её комнате. План комнаты с замерами, которые сделала Наталья, представлен ниже.

Комната имеет неправильную форму: три прямых угла, а вместо четвёртого угла она имеет стену округлой формы (Рис. 13).

Рис. 13. Схема комнаты Марии

Для покрытия пола Наталья решила остановиться на ковролине. В строительных магазинах ковролин предлагается в рулонах, от которых покупатель обычно требует отрезать подходящее для его задачи количество метров. Ширина рулона стандартно составляет 2 м. В планах Натальи полностью покрыть пол комнаты ковролином так, чтобы ни один кусочек не заходил на другой внахлест и между ними не было зазоров.

Задание 1. Прочитайте текст «Ремонт комнаты». Запишите решение и ответ на вопрос.

Ширина рулона меньше длины и меньше ширины комнаты, поэтому, чтобы полностью покрыть пол комнаты, надо выложить вплотную один к другому несколько кусков ковролина перпендикулярно стене с окном.

Какого наименьшего количества метров ковролина будет достаточно, чтобы полностью застелить пол в комнате Натальи?

Задание 1.1. Выделите критерий, по которому Вы делали выбор оптимального варианта, а также действия, которые Вы выполняли.

Соотнесите выделенные Вами действия и критерии выбора оптимального варианта с возможностью их применения к следующим жизненным ситуациям: укладка паркета в прямоугольной комнате, укладка плитки в бассейне, расстановка мебели в комнате Марии.

Задание 2. Прочитайте текст «Ремонт комнаты». Запишите решение и ответ на вопрос.

От рулона шириной 2 м отрезан кусок длиной 5 м. Какова наибольшая площадь комнаты (в квадратных метрах), пол которой можно полностью покрыть этим ковролином?

Комментарий. Уровень сложности — средний. Но добавление задания 2 переводит уровень сложности на высокий. Данная задача подходит для обучающихся 7 класса, так как в предметных результатах Федеральной рабочей программы7 отражено: «Вычислять линейные величины». Выделение критерия

[7] Федеральная рабочая программа общего образования. Математика (базовый уровень). Для 5-9 классов образовательных организаций. — Текст : электронный // Единое содержание общего образования : [сайт]. — URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf (дата обращения: 01.05.2024).

выбора оптимального варианта и действий (задание 1.1.) способствуют формированию ФМГ. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный, рефлексивный (задание 1.1.).

Задача 5. Ковер в детскую комнату [14]

На выходных вся семья Даши решила сделать кое-что полезное и поехала в магазин «Ковер-Пол». Там, как они и думали, нашелся большой выбор разных ковриков и паласов. Тщательно все обсудив и посмотрев все подходящие модели, семья решила взять ковер «Мистика».

Прежде всего родители и дети сверились с таблицей (Таблица 6), в которой были указаны размеры и цена продававшихся вариантов ковра «Мистика».

Таблица 6

Варианты ковра

Номер	Размеры (см)	Цена (руб.)
1	240 х 340	59 990
2	200 х 290	29 990
3	190 х 230	19 900
4	180 х 220	7 900

Внимание. Стоимость доставки ковра составляет 5% от его цены, указанной в таблице.

Задание 1. Как вы думаете, какой из имеющихся в продаже вариантов ковра надо выбрать семье, если площадка посередине комнаты имеет размеры 2,5 х 3,5 м и нужен ковер наибольшего подходящего размера?

Кроме того, надо учесть, что на покупку ковра с доставкой отложена сумма в 25 000 рублей.

Выберите номер ковра и объясните свой ответ.

Задание 2. Какие действия Вы выполняли и какие данные использовали для нахождения оптимального варианта?

Комментарий. Уровень сложности задачи — высокий. В представленной задаче необходимо применить формулу площади прямоугольника, выполнить действия с десятичными дробями и округлить результат, находить процент от числа. Задание с выбором варианта ответа и объяснением. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Решение:

Подходящий вариант ковра — 3, так как цена с учетом доставки составит $19900 + 0{,}05 \cdot 19900 = 19900 + 995 = 20895$ руб.

Этим вариантом ковра удастся покрыть зону комнаты размером 190 x 230 см.

Задание 2. Для нахождения оптимального варианта потребовалось обратить внимание на отложенную на покупку ковра сумму и стоимость доставки, а после этого учесть условие о том, что ковром должна быть покрыта наибольшая возможная площадь площадки в комнате.

Действия, выполняемые при нахождении оптимального варианта: вычисление процента от числа; сложение натуральных чисел; сравнение натуральных чисел.

Профессиональный контекст

Задача 6. Поддон с коробками [16]

Склад предоставляет услуги по хранению различных товаров. Товары принимаются в отдельных коробках и на поддонах (Рис. 14).

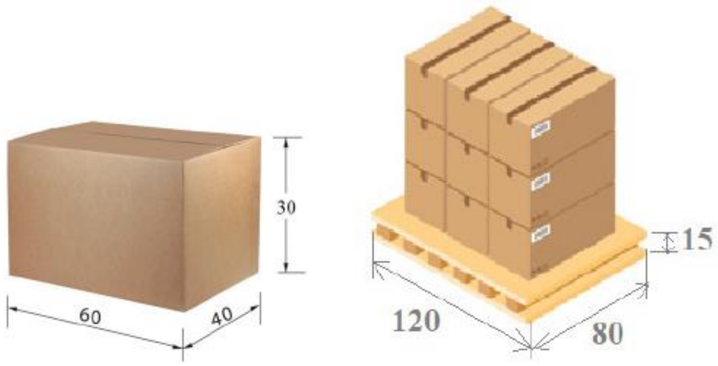


Рис. 14. Коробки на поддоне

На складе действуют следующие правила:

1. Максимальный размер одной коробки с товаром — 60 х 40 х 30 см.

2. Если суммарный объем коробок с товаром в одной поставке больше $10\ \text{м}^3$, то поставка должна быть на поддоне размером 120 х 80 х 15 см. В этом случае нет ограничения по максимальному размеру коробки.

Оплата услуг склада производится каждый понедельник согласно установленным тарифам (Таблица 7).

Таблица 7

Тарифы на хранение товара

Стоимость хранения, руб./день	
Коробка с товаром	Поддон с товаром
0,8	8,4

Задание 1. Продавец упаковал товар в коробки размером 60 х 40 х 30 см. Какое наибольшее количество коробок он может поставить на склад без поддона?

Задание 2. Продавец пледов хочет посчитать, какое наибольшее количество коробок 60 х 40 х 30 см (длина х ширина х высота) уместится на одном поддоне размером 120 х 80 х 15 см. Он знает, что высота поддона с коробками не должна превышать 1,8 м.

Помогите продавцу ответить на этот вопрос. Запишите решение и ответ.

Комментарий. Задача с заданием 1 имеет низкий уровень сложности, так как формат ответа — краткий. Добавление задания 2 повышает уровень сложности задачи до среднего, так как обучающимся необходимо решить задачу на измерение геометрических величин и выявить недостаточность и избыточность данных, представленных вербально или графически. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Решение:

Задание 1. Объем одной коробки: $60 \cdot 40 \cdot 30 = 72000\ \text{см}^3 = 0{,}072\ \text{м}^3$.

Так как в условии указано, что максимальный объем коробок без поддона $10\ \text{м}^3$, значит $\frac{10}{0{,}072} \approx 138{,}9$.

Ответ: без поддона можно поставить 138 коробок.

Задание 2. На первый ряд поддона может уместиться 4 коробки, так как в длину и ширину может поместиться по 2 коробки (всего 4).

А в высоту можно установить 5 слоев коробок ($180 < (15 + 30 \cdot 5)$).

Значит всего на поддон может поместиться 20 коробок (5 слоев по 4 штуки в каждом).

Задача 7. Рекламный баннер

Под словом «баннер» в интернете обычно подразумевается графическое изображение рекламного характера (Рис. 15).

Таблица 8

Виды баннеров

Название	Размер, пикс.
Растяжка	800 x 100
Длинный баннер	468 x 60
Всплывающий квадрат	250 x 250
Прямоугольник	180 x 150
Небоскреб	120 x 600
Микро-полоса	88 x 31

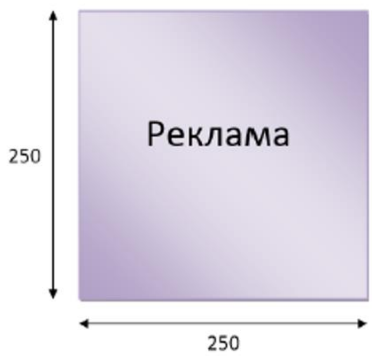


Рис. 15. Пример рекламного баннера «всплывающий квадрат»

Стоимость 1000 показов рекламного баннера пользователям интернета зависит от его площади и рассчитывается по формуле $C = 0{,}03 \cdot S$, где C — стоимость рекламы (в рублях), S — площадь рекламного баннера (в кв. пикселях, Таблица 8).

Оплачивать можно только количество показов, кратное 1000.

Мария выделила на рекламу своего товара в интернете 5000 рублей. Она хочет, чтобы её баннер увидели не менее 4000 пользователей. Какой вид баннера она может использовать, чтобы уложиться в заданный бюджет и получить желаемый охват просмотров?

При выполнении данного задания можете считать, что количество пользователей равно количеству просмотров.

Задание 1. Выберите баннер наибольшего размера, который может позволить себе Мария. Запишите решение и ответ.

Комментарий. Уровень сложности задачи — высокий. При решении задачи обучающимся необходимо вычислять по формуле, распознавать и интерпретировать зависимости, сравнивать площади. Формат ответа предполагает выбор ответа с объяснением. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Решение.

Для ответа на вопрос в задании сначала нужно рассчитать площадь каждого баннера:

— Растяжка: $S = 800 \cdot 100 = 80000$ пикс^2

— Длинный баннер: $S = 468 \cdot 60 = 28080$ пикс^2

— Всплывающий квадрат: $S = 250 \cdot 250 = 62500$ пикс^2

— Прямоугольник: $S = 180 \cdot 150 = 27000$ пикс^2

— Небоскреб: $S = 120 \cdot 600 = 72000$ пикс^2

— Микро-полоса: $S = 88 \cdot 31 = 2728$ пикс^2

Далее необходимо вычислить стоимость 1000 показов каждого баннера:

— Растяжка: $C = 0{,}03 \cdot 80000 = 2400$ руб

— Длинный баннер: $C = 0{,}03 \cdot 28080 = 842{,}4$ руб

— Всплывающий квадрат: $C = 0{,}03 \cdot 62500 = 1875$ руб

— Прямоугольник: $C = 0{,}03 \cdot 27000 = 810$ руб

— Небоскреб: $C = 0{,}03 \cdot 72000 = 2160$ руб

— Микро-полоса: $C = 0{,}03 \cdot 2728 = 81{,}84$ руб

Рассчитаем максимальное количество показов, доступное для покупки за 5000 рублей:

— Растяжка: $\frac{5000}{2400} \cdot 1000 = 2 \cdot 1000 = 2000$ показов

— Длинный баннер: $\frac{5000}{842{,}4} \cdot 1000 \approx 5{,}94 \cdot 1000 = 5000$ показов

— Всплывающий квадрат: $\frac{5000}{1875} \cdot 1000 \approx 2{,}67 \cdot 1000 = 2000$ показов

— Прямоугольник: $\frac{5000}{810} \cdot 1000 \approx 6{,}17 \cdot 1000 = 6000$ показов

— Небоскреб: $\frac{5000}{2160} \cdot 1000 \approx 2{,}31 \cdot 1000 = 2000$ показов

— Микро-полоса: $\frac{5000}{81{,}84} \cdot 1000 \approx 61{,}08 \cdot 1000 = 61000$ показов

Выберем баннеры, которые обеспечат не менее 4000 показов: длинный баннер, прямоугольник, микро-полоса.

Наибольшая площадь у длинного баннера: 28080 пикс^2.

Ответ: Мария может использовать длинный баннер, чтобы уложиться в бюджет 5000 рублей и получить не менее 4000 просмотров.

Общественный контекст

Задача 8. Коробка для кексов [15]

В мини-пекарне выпекают кексы, которые поставляют в магазин. Диаметр готового кекса — 7 см, высота — 6 см.

Кексы упаковывают в коробки в форме прямоугольного параллелепипеда, которые заказывают у фирмы-производителя бумажной тары.

На рисунке (Рис. 16) показана часть коробки (без крышки) для упаковки кексов.

Задание 1. Каковы наименьшие размеры (в см) коробки для упаковки шести кексов?

Рис. 16. Коробка с кексами

Задание 2. Мини-пекарня должна поставить в магазин партию из 40 коробок в форме прямоугольного параллелепипеда с упакованными в них кексами. Размер каждой коробки: длина — 16 см, ширина — 16 см, высота — 10 см.

Для перевозки нужно упаковать партию в транспортировочные коробы, размер которых указан на рисунке ниже (Рис. 17). Коробка может укладываться в короб на любую свою грань.

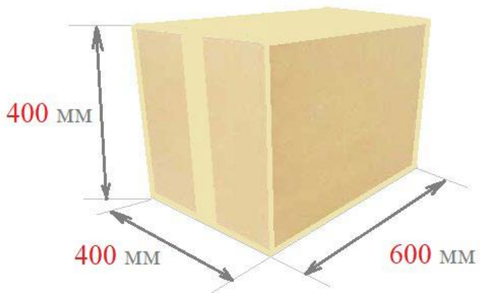


Рис. 17. Размеры короба

Какое наибольшее количество коробок с кексами поместится в один транспортировочный короб?

Комментарий. Задача с заданием 1 имеет низкий уровень сложности, так как формат ответа — краткий. Добавление задания 2 повышает уровень сложности задачи до среднего, так как обучающимся необходимо применять представления о прямоугольном параллелепипеде, его объеме и измерениях, выполнять преобразование единиц измерения, осуществлять перебор вариантов. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Задача 9. Вращающаяся дверь

Вращающаяся дверь на входе во многие здания на кампусе Московского университета состоит из трех перегородок, которые вместе с этой дверью достаточно быстро вращаются внутри пространства с круговым поперечным сечением. Внутренний диаметр этого пространства — 2 метра. Три дверные перегородки расположены на равных расстояниях друг от друга и, соответственно, делят пространство прохода на три равных сектора. Ниже на плане (Рис. 18) показаны дверные перегородки в трех разных позициях, если смотреть на них сверху.

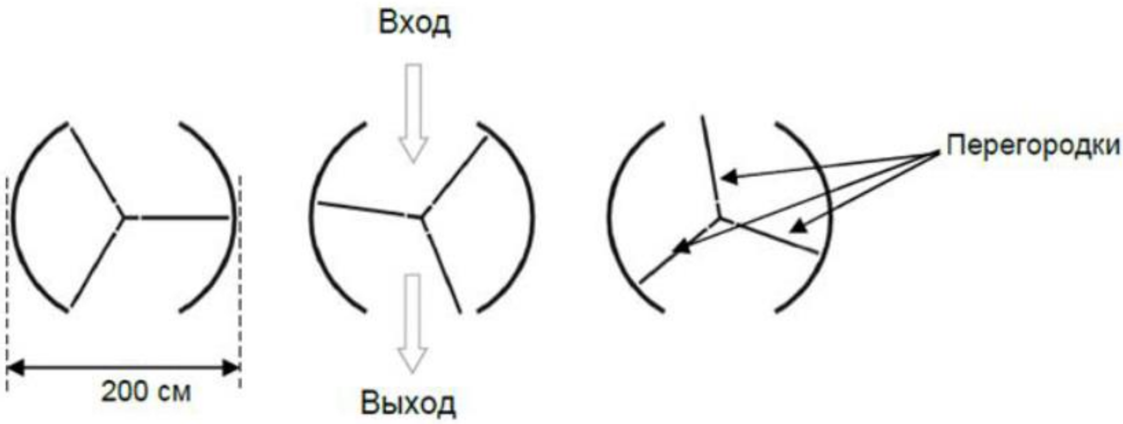


Рис. 18. Дверные перегородки

Два дверных проема (на нашем рисунке это пунктирные дуги) идентичны друг другу по размеру. Если эти проемы при проектировании окажутся слишком широкими, то вращающиеся двери не смогут закрыть пространство прохода и воздух сможет свободно поступать через вход и выход внутрь холла и из него. Это приведет либо к утечке тепла из здания, либо к его заметному увеличению — смотря какая будет температура на улице. Этот случай показан на Рис. 19.

Задание 1. Какую наибольшую длину дуги в сантиметрах может иметь каждый дверной проем, чтобы воздух никогда не мог свободно поступать через вход и выход?

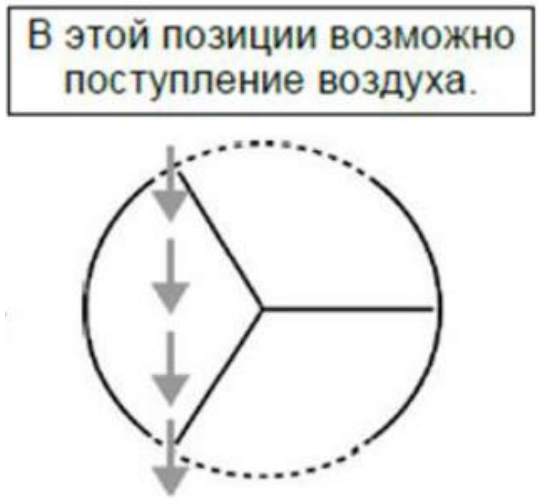


Рис. 19. Поступление воздуха через дверь

Комментарий. Задача имеет высокий уровень сложности. Для решения задачи обучающимся необходимо вычислять длину дуги окружности. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Научный контекст

Задача 10. Футбольное поле [19]

Футбол — всем известная спортивная игра, которой увлекаются взрослые и дети разных стран. В футбол играют на травяном поле, размеры которого могут быть разными и измеряться как в метрах, так и в ярдах. Ширина может изменяться от 45 до 90 м, а длина от 90 до 120 м.

Задание 1. Прочитайте текст «Футбольное поле». Запишите ответ на вопрос в виде числа и объясните ход решения.

Какую наибольшую площадь может иметь футбольное поле?

Комментарий. Представленная задача относится к низкому уровню сложности, так как обучающимся лишь необходимо знать формулу площади прямоугольника, учитывать условия задания и выполнять действия с натуральными числами. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Решение.

Максимально возможная длина поля: 120 метров.

Максимально возможная ширина поля: 90 метров.

Площадь поля с такими параметрами: $S = 120 \cdot 90 = 10800$ м^2.

Ответ: наибольшая площадь футбольного поля: 10800 м^2.

Задача 11. Форматы бумаги серии А [18]

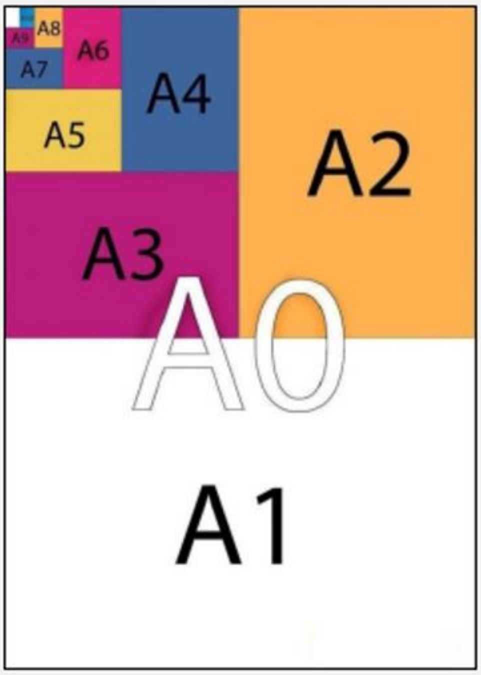
Формат бумаги – стандартизированный размер бумажного листа.

Популярностью пользуется форматы серии А, которая включает форматы от А0 до А10, где в качестве базового используется лист формата А0, имеющий форму прямоугольника размером 841 x 1189 мм (Рис. 20).

Каждый последующий меньший формат можно получить из листа предыдущего формата, сложенного пополам поперёк его длинной стороны. При вычислении размеров стороны меньшего листа доли миллиметра отбрасываются.

Все форматы бумаги серии А имеют одинаковое отношение меньшей стороны листа к большей, равное $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Листы бумаги серии А



Форматы бумаги серии А, в мм	
A0	841 × 1189
A1	594 × 841
A2	420 × 594
A3	297 × 420
A4	210 × 297
A5	148 × 210
A6	105 × 148
A7	74 × 105
A8	52 × 74
A9	37 × 52
A10	…

Рис. 20. Форматы бумаги серии А (с точностью до мм)

Задание 1. Воспользуйтесь текстом «Форматы бумаги серии А». Запишите решение и ответ на вопрос.

Лена является организатором конференции, и ей необходимо подготовить бэйджи для выступающих. У неё есть пачка (500 листов) бумаги формата А3.

Какое максимальное количество бэйджей формата А8 она может сделать из упаковки бумаги формата А3?

Задание 2. Придумайте вопрос к задаче с похожим содержанием.

Задание 3. Лену попросили купить несколько пачек бумаги формата А2. Она хочет узнать, сколько пачек бумаги она сможет унести, если предельно допустимая нагрузка (перемещение груза вручную) для её возраста составляет 3 кг?

На пачке бумаги формата А2 дана следующая информация:

- в пачке 100 листов;
- плотность бумаги – $96\ \text{г}/\text{м}^2$.

Плотность бумаги — это масса листа бумаги единичной площади.

Используя данную информацию, ответьте на вопрос в задании и поясните свой ответ.

Комментарий. Представленная задача подходит для обучающихся 8 класса и относится к низкому уровню сложности, так как в этот период школьники осваивают понятие иррационального числа[8]. Задания 1, 3 к этой задаче способствуют формированию функциональной математической грамотности, так как обучающимся необходимо найти связь задачи с реальным миром. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный, рефлексивный (задание 2).

Приведём решение представленной задачи в качестве примера решения задач, формирующих ФМГ.

[8] Федеральная рабочая программа общего образования. Математика (базовый уровень). Для 5-9 классов образовательных организаций. — Текст : электронный // Единое содержание общего образования : [сайт]. — URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf (дата обращения: 01.05.2024).

Для ответа на 1 вопрос в задаче можно составить таблицу:

формат	количество листов
А3	500
А4	1000
А5	2000
А6	4000
А7	8000
А8	16000

Ответ: 16 000 бэйджей формата А8 можно сделать из пачки бумаги (500 листов) формата А3.

Либо можно заметить, что при разрезании листа пополам, формат бумаги изменяется на следующий. Например, лист А4 при разрезе пополам превращается в 2 листа формата А5.

Тогда при переходе от формата А3 к формату А8 происходит 5 таких переходов. Следовательно, из 1 листа А3 получится $2^5 = 32$ листа формата А8. В пачке 500 листов: $500 \cdot 32 = 16000$ листов.

Возможный ответ на вопрос 2: сколько пачек бумаги формата А4 по 500 листов потребуется, чтобы изготовить 64000 бэйджей формата А8?

Решение к вопросу 3:

Площадь листа формата А2: $420 \cdot 594 = 249\,480$ мм$^2 = 0{,}24948$ м^2.

Общая площадь для упаковки 100 листов: $0{,}24948 \cdot 100 = 24{,}948$ м^2.

Масса одной пачки: $24{,}948$ м$^2 \cdot 96 \frac{\text{г}}{\text{м}^2} \approx 2395$ г.

Ответ: Лена сможет купить и унести лишь одну пачку бумаги формата А2.

Задача 12. Высота снежного покрова [12]

3 апреля 2022 года в Москве прошёл снегопад, и если накануне высота снежного покрова составляла 10 см, то на утро следующего дня она выросла до 31 см, то есть снежный покров вырос на 21 см.

Чем больше город (а Москву можно отнести к мегаполисам), тем важнее городским службам учитывать этот параметр, так как большой снегопад может буквально парализовать жизнь горожан. Сугробы нужно убирать и с больших улиц, и в переулках, и в очень разных дворах; городским службам нужно запланировать свою работу как можно раньше, поэтому они тесно сотрудничают с метеорологами.

Как метеоролог замеряет высоту снежного покрова? В одно и то же время суток, в 9 часов утра, он выходит на специальную площадку и специальной снегомерной рейкой измеряет высоту снежного покрова на территории метеостанции, фиксируя ее в сантиметрах (Рис. 21). Он делает три замера в разных частях площадки, а затем вычисляет среднее значение (результат округляется до целого).

Рис. 21. Метеостанция и снегомерная линейка

Рейка для измерения высоты снежного покрова — это на самом деле обычная линейка, ничуть не изменившаяся за последний век. В том числе поэтому ученые могут сравнивать погоду сейчас с той, которую фиксировали раньше.

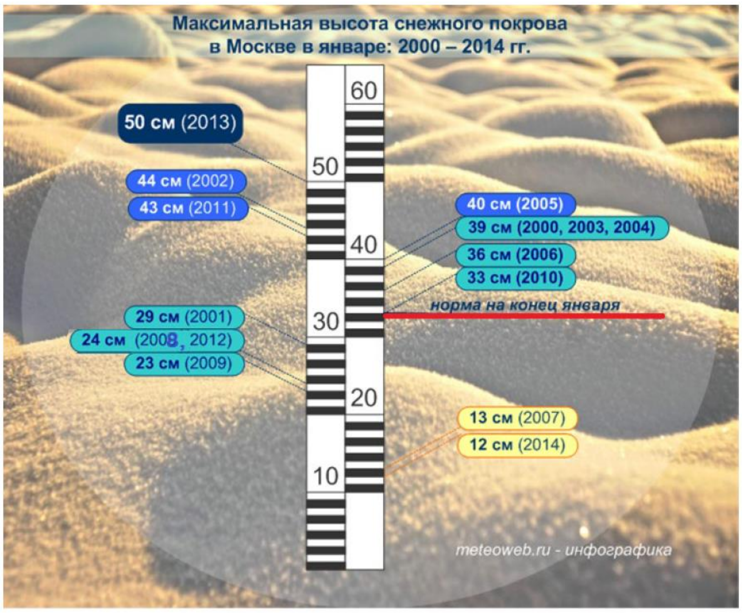


Рис. 22. Инфографика

На инфографике (Рис. 22) изображена снегомерная рейка с данными о максимальной высоте снежного покрова в Москве в январе 2000-2014 гг. Данные приведены не на конец месяца, а на дату достижения этой максимальной высоты.

Задание 1. Воспользуйтесь текстом «Высота снежного покрова» и инфографикой. Отметьте нужный вариант ответа, а затем обоснуйте свой ответ.

Учащиеся в одном классе Михаил, Антон, Данил и Саша еще и живут в одном доме. Утром, торопясь в школу, они решили замерить высоту выпавшего ночью снега. Они осторожно смахнули часть свежей снежной шапки с лобового стекла автомобиля родителей Антона, который те запарковали у подъезда, потому что подумали, что там будет удобно оценить высоту снежного слоя, но стали раздумывать, как поставить линейку при измерении.

Михаил: надо поставить линейку строго вертикально, чтобы она была перпендикулярна горизонтальной плоскости;

Антон: линейку надо расположить перпендикулярно плоскости стекла;

Данил: это не имеет значения – результат будет одним и тем же;

Саша: нельзя измерять на наклонной поверхности, надо выбрать ровный горизонтальный участок.

Как вы считаете, кто из друзей прав? Обоснуйте свой выбор.

Комментарий. Представленная задача относится к среднему уровню сложности. При ответе на вопрос обучающимся необходимо использовать геометрические представления, применять свойства прямых, прямоугольного треугольника. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Задача 13. Исследовательская лаборатория

В научно-исследовательской лаборатории занимаются изучением свойств новых материалов. Для проведения экспериментов требуется соединить 3 ключевые точки, расположенные внутри специальной исследовательской установки. Эти точки представляют собой следующие элементы:

1. Точка C — центральный анализатор, который необходимо соединить с двумя основными измерительными приборами, расположенными на противоположных стенах установки.

2. Лучи a и b — это 2 пути, по которым можно прокладывать соединения от анализатора к измерительным приборам. Эти пути образуют угол с вершиной в центре установки.

В научной установке проведены 2 основных пути для прокладки кабелей: путь a и путь b, которые образуют угол. Внутри этого угла находится центральный анализатор C (Рис. 23).

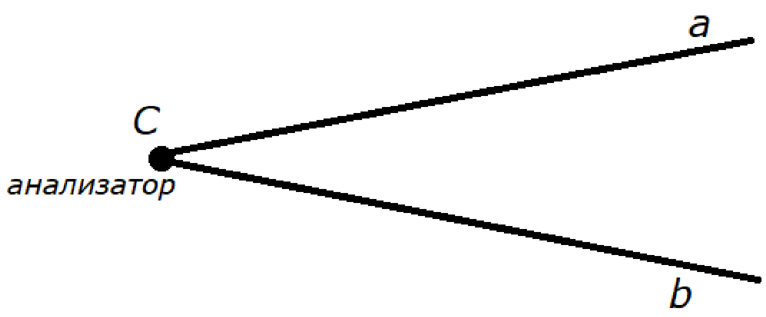


Рис. 23. Научная установка

Задание 1. Необходимо найти оптимальные точки на этих путях, чтобы минимизировать длину кабеля, необходимого для соединения анализатора C с двумя измерительными приборами. Такой подход важен для экономии материалов и ресурсов, что важно для эффективного проведения научных исследований в лаборатории. Запишите решение и ответ.

Комментарий. Задача относится к высокому уровню сложности, так как для решения необходимо симметрично отразить точку C относительно лучей a и b, построить прямую, определить точки пересечения и проверить, что найденные точки действительно минимизируют периметр треугольника ABC [39]. Компоненты ФМГ: когнитивный, деятельностный.

Выводы по Главе 2

1. На основе анализа литературных источников разобраны и описаны элементы схемы математической грамотности.
2. Выделены принципы построения заданий, выполнение которых способствует формированию функциональной математической грамотности, а также выделена связь ФМГ с результатами школьного обучения.
3. Разработана и обоснована совокупность экстремальных задач с геометрическим содержанием со специально сформулированными заданиями для формирования функциональной математической грамотности. Задачи распределены по контекстам реального мира и уровням сложности. Каждая задача сопровождается педагогическим комментарием. К некоторым задачам из совокупности приведено решение, по которому, в том числе, можно увидеть уровень сложности задачи.

Заключение

Сопоставление результатов работы с поставленными задачами позволяет заключить следующее:

1) Функциональная математическая грамотность — комплексная способность человека продуктивно применять усвоенные математические знания, умения, навыки и компетенции для решения различных задач реального мира, успешного функционирования в обществе и саморазвития в течение жизни.

2) Проанализировав результаты исследований PISA и TIMSS сделан вывод о том, что тенденция повышения результатов явно проявилась, когда в российской основной школе начал осуществляться переход на новые стандарты с заметным уклоном в сторону функциональной математической грамотности.

3) Дидактические принципы построения заданий к экстремальным задачам с геометрическим содержанием, способствующий формированию ФМГ:

— задания должны быть основаны на реальных ситуациях из повседневной жизни, профессиональной деятельности или науки;

— задания должны быть сконструированы таким образом, чтобы обучающиеся могли видеть последовательность шагов для решения проблемы на всех этапах;

— задания должны включать различные типы задач, от простых к сложным, чтобы развивать математические навыки обучающихся;

— задания могут быть интегрированы с другими предметами, чтобы продемонстрировать связь математики с другими областями знания;

— задания могут содержать открытые вопросы, которые могут иметь несколько правильных способов решения или требовать обоснования выбора.

Процесс решения задачи должен включать этапы формулирования проблемы на математическом языке, применения математических знаний, интерпретации математического содержания обратно на язык реального мира и оценки полученных результатов на соответствие логике и поставленной проблеме в задании.

4) На основе проделанной работы составлена совокупность экстремальных задач с геометрическим содержанием с заданиями, способствующими формированию функциональной математической грамотности: к каждому из контекстов проблем реального мира составлены минимум по одной задаче каждого уровня сложности.

Таким образом, следует считать, что задачи исследования полностью выполнены, цель достигнута.

Направление дальнейшего продолжения работы и развития использованных в ней идей может заключаться в следующем:

— увеличение количества задач в представленной совокупности;

— апробация составленной совокупности задач на обучающихся основной школы с целью выявить их влияние на формирование функциональной математической грамотности. Вместе с тем, выделить задачи с заданиями для входного и итогового контроля сформированности ФМГ, а экстремальные задачи с геометрическим содержанием оставить только на формирование ФМГ.

Список источников и литературы

1. TIMSS (Международное исследование качества математического и естественно-научного образования) // Федеральный институт оценки качества образования URL: https://fioco.ru/timss (дата обращения: 29.03.2024).
2. Аксенова М. Энциклопедия для детей (Том 11). - М.: Аванта+, 2003
3. Алексеева Е.Е. Методические особенности формирования математической грамотности учащихся как составляющей функциональной грамотности // Мир науки, культуры, образования. 2020. №4 (83). С. 214-218.
4. Аналитический отчет по результатам международного исследования PISA-2018 // Центр оценки качества образования URL: http://centeroko.ru/pisa18/pisa2018_pub.html (дата обращения: 15.03.2024).
5. Блинкова Л.В., Вебер Н.П., Виноградова Л.П. Педагогическая система формирования функциональной грамотности школьников // Наука и образование. 2009. №1. С. 91-98.
6. Бодряков В.Ю., Ахаимов С.В. К вопросу о формировании функциональной математической грамотности у обучающихся основной общей школы с помощью задач практико-ориентированного содержания // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. Екатеринбург: Уральский государственный педагогический университет, 2022. С. 134-144.
7. Бодряков В.Ю., Быков А.А., Ударцева Д.А. Квадратичная функция как мотивирующий инструмент решения экстремальных задач // Педагогическое образование в России. 2018. №8. С. 55-63.
8. Бодряков В.Ю., Кротова А.В. Формирование функциональной математической грамотности обучающихся 6 классов при решении задач на движение в ходе учебных игр // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2021. №6. С. 197-208.
9. Борщевская А. Функциональная грамотность в контексте современного этапа развития образования // Наука и школа. 2021. № 1. С. 199-208.

10. Валеев И.И. Функциональная математическая грамотность как основа формирования и развития математической компетенции // Бизнес. Образование. Право. 2020. №4 (53). С. 353-360.
11. Гершунский Б.С. Грамотность для XXI века // Советская педагогика. 1990. №4. С. 58-64.
12. Диагностическая работа для учащихся 7 классов. Математическая грамотность // ФГБНУ Институт стратегии развития образования URL: http://surl.li/uhcjo (дата обращения: 06.06.2024).
13. Дударева Н.В., Утюмова Е.А. Модель формирования функционально-математической грамотности в процессе обучения математике // Педагогическое образование в России. 2021. №4. С. 14-25.
14. Задача "Ковер в детскую комнату" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: https://clck.ru/3B823w (дата обращения: 14.05.2024).
15. Задача "Коробка для кексов" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: http://surl.li/uhchg (дата обращения: 14.05.2024).
16. Задача "Коробки на поддоне" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: http://surl.li/uhcgd (дата обращения: 14.05.2024).
17. Задача "Ремонт комнаты" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: https://skiv1.instrao.ru/bank-zadaniy/matematicheskaya-gramotnost/2021_МГ_7/09_Ремонт%20комнаты_текст.pdf (дата обращения: 14.05.2024).
18. Задача "Форматы бумаги серии А" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: http://surl.li/uhcjg (дата обращения: 14.05.2024).

19. Задача "Футбольное поле" // ФГБНУ Институт стратегии образования Российской академии образования URL: http://surl.li/uhcim (дата обращения: 14.05.2024).
20. Иванова Т.А., Симонова О.В. Структура математической грамотности школьников в контексте формирования их функциональной грамотности // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2009. №1-1. С. 125-129.
21. Концепция направления «математическая грамотность» исследования PISA-2021 // Федеральный институт оценки качества образования URL: https://fioco.ru/Contents/Item/Display/2201978 (дата обращения: 03.04.2024).
22. Краткая информационная справка об исследовании TIMSS // Федеральный институт оценки качества образования URL: https://fioco.ru/Media/Default/Documents/МСИ/Краткая%20справка%20TIMSS.pdf (дата обращения: 29.03.2024).
23. Лаврова-Кривенко Я. В. Основные особенности формирования функциональной математической грамотности в условиях общеобразовательной школы // Вестник ТОГИРРО. 2021. №2(47). С. 7-8.
24. Леонтьев А.А. Образовательная система "Школа 2100". Педагогика здравого смысла. М.: Баласс, 2003. 368 с.
25. Леонтьев А.А. Педагогика здравого смысла. Избранные работы по философии образования и педагогической психологии. М.: Смысл, 2016. 528 с.
26. Подлипский О.К. Функциональная грамотность как направление развития математического образования в школе // Мир науки, культуры, образования. 2020. №6. С. 104-106.
27. Результаты общероссийской оценки по модели PISA-2022 // Федеральный институт оценки качества образования URL:

https://fioco.ru/Media/Default/Documents/Отчет_общероссийская%20оценка%20по%20модели%20PISA-2022%20(2).pdf (дата обращения: 28.03.2024).

28. Родионов Е.М., Синякова С.Л. Пособие для поступающих в ВУЗы. Математика. – М.: Ориентир, 2017.
29. Рослова Л.О. Диагностика трудностей шестиклассников при изучении математики // Отечественная и зарубежная педагогика. 2021. Т. 1, № 6. С. 43–62.
30. Рослова Л.О. Функциональная математическая грамотность: что под этим понимать и как формировать // Педагогика. 2018. №10. С. 48-55.
31. Рослова Л.О., Квитко Е.С. Основные нововведения при оценке математической грамотности в рамках международного исследования PISA 2021-2022, проводимого в форме компьютерного тестирования // Отечественная и зарубежная педагогика. 2021. Т. 2, №5(79). С. 124-142.
32. Рослова Л.О., Квитко Е.С., Денищева Л.О., Карамова И.И. Проблема формирования способности "применять математику" в контексте уровней математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2020. №2 (70). С. 74-99.
33. Рослова Л.О., Краснянская К.А., Квитко Е.С. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1, № 4 (61). С. 58–79.
34. Семенова И.Н., Слепухин А.В. Использование теоретических основ развивающего обучения математике для формирования у школьников функциональной математической грамотности // Эвристическое обучение математике : V Международная научно-методическая конференция, Донецк, 23–25 декабря 2021 года.. Донецк: Донецкий национальный университет, 2021. С. 324-329.

35. Семенова И.Н., Слепухин А.В., Негомодзянова И.Р. Подбор и конструирование задания для формирования функциональной математической грамотности у школьников при работе с математическим материалом // Эвристическое обучение математике: материалы V Междунар. науч.-метод. конф. 25-26.12.2021. Донецк: Изд-во ДОННУ, 2021. С. 329-334.
36. Семёнова И.Н., Шорохов Е.А. Исследование задачного материала для оценки возможности надёжного формирования функциональной математической грамотности на основе анализа определения понятия // Вестник Шадринского государственного педагогического университета. - 2023. - №3 (59). - С. 81-94.
37. Семёнова И.Н., Шорохов Е.А. К вопросу о корректном использовании терминов, связанных с современными образовательными результатами // Вестник Шадринского государственного педагогического университета. 2024. №1 (61). С. 33-42.
38. Слепухин А.В. Методические аспекты формирования у обучающихся средней школы компонентов функциональной математической грамотности // Вестник Шадринского государственного педагогического университета. 2022. №4 (56). С. 72-78.
39. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Экстремальные задачи по геометрии. М.: Чистые пруды, 2007. 32 с.
40. Тюменева Ю.А., Шкляева И.В. Два подхода к пониманию «Применения знаний»: трансфер и моделирование. Обзор литературы и критика // Вопросы образования. 2016. №1. С. 8-33.
41. Ушаков Д.Н. Толковый словарь современного русского языка. М.: Альта-Пресс, 2005. 1207 с.
42. Функциональная грамотность младшего школьника в современных условиях. Дидактическое сопровождение: Книга для учителя / Под ред. Н.Ф. Виноградовой. М.: Российский учебник, 2018.

43. Шляхова И.Б. Компетенции педагога для формирования функциональной грамотности обучающихся // Теоретические и практические основы научного прогресса в современном обществе: сборник статей Международной научно-практической конференции. Ижевск: Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна", 2021. С. 173-175.
44. ЮНЕСКО. Отчеты Генеральной конференции. 20-я сессия. Париж, 24 октября - 28 ноября 1978 // Резолюции. - Париж : ЮНЕСКО, 1979 URL: https://treaties.un.org/doc/source/docs/unesco_res_5_9.2_1-E.pdf (дата обращения: 06.06.2024).
45. Ehmke T., Wild E., Müller-Kalhoff T. Comparing adult mathematical literacy with PISA students: results of a pilot study // Zentralblatt füur Didaktik der Mathematik. 2005. №37. С. 159-167.
46. Gray W. S. The teaching of reading and writing // Paris, UNESCO. 1956.
47. Holenstein M., Bruckmaier G., Grob, A. Transfer effects of mathematical literacy: an integrative longitudinal study // European Journal of Psychology of Education. 2021. №36. С. 799-825.
48. Levine K. Functional literacy: fond illusions and false economies // Harvard Educational Review. 1982. № 52(3). С. 249–266.
49. PISA 2022 Mathematics framework // Programme for international student assessment URL: https://pisa2022-maths.oecd.org/#Contexts (дата обращения: 06.06.2024).
50. SDG indicator metadata. // UNESCO Institute for Statistics : [сайт]. URL: https://tcg.uis.unesco.org/wp-content/uploads/sites/4/2020/08/Metadata-4.6.1.pdf (дата обращения: 15.03.2024).
51. What is PISA? // OECD iLibrary URL: http://surl.li/ujvrn (дата обращения: 12.05.2024).