

Министерство просвещения Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

Выпускная квалификационная работа

Направление «44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки). Математика и информатика»

Работа допущена к защите:

дата

подпись

оценка

Исполнитель:

Сивкова Мария Андреевна
студентка группы МИ-1931

Научный руководитель:

Дударева Н. В.,
кандидат педагогических наук,
доцент

Екатеринбург 2024

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.....	5
1.1. Сущность понятия алгоритмического мышления, его структурные компоненты и критерии сформированности.....	5
1.2. Особенности формирования алгоритмического мышления у учеников старших классов при обучении математике	15
Выводы по Главе 1.....	21
ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ.....	23
2.1. Задачи на построение сечений как средство формирования алгоритмического мышления.....	23
2.2. Требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений	31
2.3. Комплект заданий по теме «Построение сечений», направленных на формирование алгоритмического мышления	35
Выводы по Главе 2.....	47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	49
ЛИТЕРАТУРА	52

Введение

Одним из метапредметных результатов освоения основной образовательной программы среднего общего образования, согласно Федеральной образовательной программе, является овладение следующими умениями: составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей и корректировать с учётом новой информации [19]. Таким образом, перед учителем-предметником, в частности учителем математики, стоит задача формировать такие виды мышления, которые будут способствовать овладению выделенными умениями. В данном случае приоритетным может являться формирование алгоритмического мышления у обучающихся.

Проблемой формирования алгоритмического мышления учащихся занимались Н. Ф. Долганова, Н. Н. Еремеева, Т. Н. Лебедева, Е. С. Полат, И. Н. Слинкина, А. Н. Стась, С. Е. Царева и другие. В своих работах они выделили структурные компоненты и критерии сформированности алгоритмического мышления, а также обосновали связь обучения математике с формированием алгоритмического мышления.

Несмотря на то, что изучением данной проблемы занимаются давно, в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования и Федеральной образовательной программы она остаётся актуальной. У учителя математики возникает необходимость формировать алгоритмическое мышление в процессе обучения путём использования различных заданий. Основой для таких заданий могут быть, в частности, задачи на построение сечений, которые имеют потенциальную возможность для формирования данного вида мышления.

Объект исследования: процесс обучения математике в средней школе.

Предмет исследования: задачи на построение сечений как средство формирования алгоритмического мышления.

Цель исследования: разработка комплекта заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления учащихся при решении задач на построение сечений.

На основании цели исследования были поставлены следующие **задачи исследования:**

1. Провести анализ психолого-педагогической и методической литературы по теме исследования с целью определения понятия алгоритмического мышления, его структурных компонентов и критериев сформированности.

2. Выделить особенности формирования алгоритмического мышления у учеников старших классов при обучении математике.

3. Обосновать значимость задач на построение сечений в формировании алгоритмического мышления.

4. Сформулировать требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений.

5. Разработать комплект заданий по теме «Построение сечений», направленных на формирование алгоритмического мышления.

Глава 1. Теоретические основы формирования алгоритмического мышления в процессе обучения математике

1.1. Сущность понятия алгоритмического мышления, его структурные компоненты и критерии сформированности

Каждый человек с самого рождения сталкивается с постоянно меняющимся окружающим миром. Для успешного и долгого существования в нём необходимо предугадывать, что произойдёт в следующий момент, и принимать соответствующие меры.

Ребёнок постепенно учится достигать своих целей, осваивая различные навыки. Приобретаемые навыки означают создание различных планов действий для различных ситуаций. Эти планы, а также их выбор в зависимости от обстоятельств, представляют собой алгоритмы поведения. Чем сложнее навыки, тем сложнее алгоритмы, которые они включают в себя.

Зная даже общие принципы, гораздо проще освоить конкретные навыки. Общими принципами для всех навыков являются основные алгоритмы, на основе которых создаются планы действий, а также методы построения алгоритмов и их особенности. Умения строить алгоритмы и действовать согласно намеченному плану говорит о сформированности алгоритмического мышления.

Математике принадлежит ведущая роль в формировании алгоритмического мышления и воспитании умений действовать по заданным алгоритмам, совершенствовать известные и конструировать новые. В ходе изучения математики систематически и последовательно формируются навыки умственного труда – планирование своей работы, поиск рациональных путей её выполнения, критическая оценка результатов [19, с. 24] [18, с. 182].

В литературе отсутствует общепризнанное определение алгоритмического мышления, и каждый автор понимает его по-своему.

В. В. Парченкова пишет, что алгоритмическое мышление – это система мыслительных приёмов человека, направленная на решение задач [17].

Л. Ю. Филатова определяет алгоритмический стиль мышления как систему определённым образом построенных мыслительных действий, которые способствуют при решении как теоретических, так и практических задач [55].

С. О. Алтухова под алгоритмическим мышлением понимает систему приёмов мышления, способов конструирования действий, применяемых для решения конкретных учебных задач, на основе построения моделей, поиска необходимой информации, получения результата в алгоритмической форме [3].

В. А. Тестов пишет, что алгоритмическое мышление – это когнитивные структуры, которые позволяют не только применять известные алгоритмы и методы, но и планировать некоторые действия, приводящие к желаемому результату, то есть выстраивать некий алгоритм и доводить до конца намеченный план решения задачи, выполняя конечную цепочку элементарных преобразований [26].

А. В. Копаев считает, что алгоритмический стиль мышления – это система мыслительных способов действий, приёмов, методов и соответствующих им мыслительных стратегий, которые направлены на решение как теоретических, так и практических задач и результатом которых являются алгоритмы как специфические продукты человеческой деятельности [10].

Ф. Ф. Шарипов определяет алгоритмическое мышление как специфический тип мышления, предполагающий умение создать алгоритм решения различных задач.

О. В. Чебурина под алгоритмическим мышлением понимает совокупность мыслительных действий и приёмов, нацеленных на решение задач, в результате которых создаётся алгоритм, являющийся специфическим продуктом человеческой деятельности [30].

И. В. Гаврилова пишет, что алгоритмическое мышление – это стиль мышления, включающий систему мыслительных операций, приёмов, мыслительных способов действий, которые направлены на поиск эффективного решения теоретических или практических задач, результатом которого является алгоритм, чёткий план или инструкция [5, с. 28-29].

В Таблица 1 приведён контент-анализ данных определений.

Таблица 1

Контент-анализ определений понятия «алгоритмическое мышление»

Автор определения, источник	Ключевые слова			
	Приёмы, методы, действия	Создание алгоритмов	Применение алгоритмов	Решение задач
Парченкова В. В. [17]	+			+
Филатова Л. Ю. [28]	+			+
Алтухова С. О. [3]	+	+		+
Тестов В. А. [26]		+	+	+
Копаев О. В. [10]	+	+		+
Шарипов Ф. Ф. [33]		+		+
Чебурина О. В. [30]	+	+		+
Гаврилова И. В. [5]	+	+		+

На основе контент-анализа можно сделать вывод о том, что ни одно из определений не раскрывает понятие алгоритмического мышления в полной мере, рассматривая лишь некоторые его характеристики. Уточним определение А. В. Копаева.

Алгоритмическое мышление (или алгоритмический стиль мышления) – это совокупность мыслительных приёмов, методов и действий, которые направлены на применение известных и создание новых алгоритмов, способствующих решению теоретических и практических задач.

К методам, входящим в алгоритмическое мышление, согласно Л. Ю. Филатовой, можно отнести [28]:

- чёткую постановку задачи;
- разбиение задачи на элементарные действия, т. е. составление

алгоритма решения задачи;

- пошаговую реализацию элементарных действий;
- использование выработанного алгоритма для решения подобных задач;
- умение создавать информационные модели;
- умение организовать поиск информации.

Алгоритм является одним из фундаментальных понятий оснований математики. Алгоритм представляет собой общепринятое и однозначное предписание, определяющее процесс последовательного преобразования исходных данных в искомый результат. Обучение математике на любом уровне обязательно включает обучение алгоритмам [12, с. 184].

Согласно Л. Ю. Филатовой, алгоритмический стиль мышления обладает теми же свойствами, которыми обладает алгоритм: точностью, понятностью, определённой, универсальностью, результативностью. Этот тип мышления позволяет решать задачи из любой сферы человеческой деятельности, а не только из математики. При решении большинства задач, включая повседневные и бытовые, человек сначала мысленно разрабатывает алгоритм действий, а затем приступает к его реализации на практике [28].

Н. Н. Еремеева пишет, что привычка использовать алгоритмы в работе – это требование жизни, а алгоритмическое мышление полезно каждому человеку независимо от его будущей профессии. Поэтому формирование у учащихся навыков алгоритмического мышления является актуальной задачей современного образования [8].

Основным признаком алгоритмического мышления, по мнению С. Е. Царевой, является способность к конструированию алгоритмов. Она утверждает, что формирование алгоритмического мышления тесно связано с формированием общего навыка решения задач, поскольку прежде чем определить общий способ решения задач в виде алгоритма, необходимо найти этот общий способ и затем исследовать возможность описания этого способа

в форме конструктивных, однозначно понимаемых последовательных операций [29].

А. Н. Стась и Н. Ф. Долганова выделяют следующие структурные компоненты алгоритмического мышления [25]:

- способность к оперированию образами;
- способность к оперированию понятиями и категориями;
- способность к формированию предметных суждений;
- способность к формированию индуктивных умозаключений;
- способность к формированию дедуктивных умозаключений;
- способность к формированию репродуктивных навыков;
- способность к формированию продуктивных навыков;
- способность к анализу задачи, её декомпозиции на уровне процессов;
- способность к формализации задачи (абстрагированию);
- понимание и способность к реализации элементарных алгоритмических операций.

Согласно А. И. Ивановой, успешное овладение алгоритмической формой познания позволяет сформировать ряд актуальных умений и навыков, включая [9]:

- навыки планирования структуры действий, необходимых для достижения поставленных целей;
- умение конструировать информационные модели для описания систем и объектов;
- навыки организации поиска актуальных информационных данных, необходимых для решения поставленных задач;
- навыки структурирования языковых коммуникативных инструментов.

Л. Ю. Филатова пишет, что в настоящее время алгоритмический стиль мышления должен формироваться у каждого члена информационного

общества.

Алгоритмическое мышление помогает учащимся не только детально продумать свои действия, но и правильно выбрать источники информации при решении разнообразных задач в процессе обучения и задач реальной жизни. Это позволяет определить наиболее целесообразный, эффективный, подходящий порядок действий с учётом сложившейся ситуации.

В современном мире важно уметь находить наилучшее решение для конкретных условий и выбирать наиболее эффективный алгоритм действий. Алгоритмический стиль мышления должен формироваться на уровне подсознания, чтобы можно было успешно решать как теоретические, так и практические задачи, разрабатывая оптимальные планы действий [28].

И. Н. Слинкина называет следующие педагогические условия формирования алгоритмического мышления [54, с. 63-64]:

1. Владение учителем педагогическим мастерством: знание проблем и задач этапа, осознание видов деятельности, с помощью которых происходит реализация поставленных задач, владение современными методами обучения, осуществление творческого подхода.

2. Наличие психолого-педагогической подготовленности школьников – сформирована установка на формирование алгоритмического мышления.

3. Научно обоснованное построение учебных занятий.

4. Осуществление разнообразных по форме и содержанию воздействий на ученика.

5. Осуществление комплексного подхода: целостное решение задач, оптимизация развития, скоординированное воздействие учителя и учащихся на личность.

6. Систематическое включение учащихся в деятельность, в результате выполнения которой применяется алгоритмическое мышление, и стимулирование такой деятельности.

7. Обеспечение обратной связи, осуществление оперативного контроля

за деятельностью школьников.

Формирование алгоритмического мышления напрямую связано с овладением алгоритмом.

Согласно Е. И. Лященко, работа с обучающимися по овладению алгоритмом обычно включает три основных этапа [14, с. 63-64]:

I. Введение алгоритма. Цель – актуализация знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма, а также формулирование алгоритма. Преобладающая форма работы с обучающимися – устная работа на повторение.

II. Усвоение алгоритма. Цель – отработка операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности. Преобладающая форма работы с обучающимися – письменная коллективная работа с широким использованием комментирования выполняемых действий.

III. Применение алгоритма. Цель – отработка алгоритма в знакомых (при варьировании исходных данных) и незнакомых ситуациях. Преобладающая форма работы с обучающимися – самостоятельная работа.

Л. Г. Лучко и И. Н. Слинкина выделяют три уровня развития алгоритмического мышления [13] [24, с. 58]:

1. *Операционный (начальный) уровень* характеризуется тем, что ученик имеет представление об алгоритме.

2. *Системный (достаточный) уровень* характеризуется тем, что ученик имеет представления об алгоритме, его свойствах.

3. *Методологический (оптимальный) уровень* характеризуется тем, что ученик имеет представления об алгоритме, знает его свойства, умеет использовать имеющиеся мыслительные схемы построения алгоритмических структур для решения нестандартных задач.

В исследовании Т. Н. Губиной выделяются индикаторы различных уровней развития алгоритмического мышления [6]. К индикаторам *операционного (низкого) уровня* она относит:

- имеется представление об алгоритме;
- умение производить разрозненные операции;
- владение способами составления простых алгоритмов;
- умение решать стандартные задачи по образцу;
- умение выполнять алгоритм, в том числе пошагово;
- умение понять и усвоить алгоритм для решения типовых задач.

К индикаторам *системного (среднего) уровня*, согласно Т. Н. Губиной, относятся:

- владение способами сочетания операций алгоритмических конструкций;
- владение способами составления сложных алгоритмов, в том числе с использованием подалгоритмов;
- умение выдвигать гипотезы по решению задач;
- умение проводить анализ задачи, детализацию алгоритма для её решения;
- способность анализировать и учитывать различные сценарии выполнения алгоритма;
- умение видеть логические ошибки в алгоритме;
- умение планировать структуру действий для построения алгоритма.

К индикаторам *методологического (высокого) уровня* автор относит:

- умение использовать мыслительные схемы решения некоторых задач;
- умение преобразовывать известные схемы решения в нестандартных ситуациях;
- умение разрабатывать стратегию построения алгоритма, выдвигать и доказывать гипотезы опытным путём;
- умение прогнозировать результаты выполнения алгоритма, видеть возможные проблемы, которые могут возникнуть при реализации алгоритма;
- способность оптимизировать алгоритм;

- умение оценивать сложность алгоритма и выбирать эффективный среди возможных.

Т. Н. Лебедева называет следующие знания и умения, определяющие критерии сформированности алгоритмического мышления [12, с. 33]:

- знание основных операций, приёмов и методов, на основе которых формируется процесс решения задачи, умение производить разрозненные операции, что составляет знание этапов решения задач и умение применять их в отдельности;

- овладение структурой совокупности всех операций. В этом случае ученик должен не только знать этапы решения задач, но и уметь принять их для достижения результата своей деятельности;

- умение применять знания основных операций, структуры совокупности операций при решении задачи, умение проводить систематизацию и обобщение знаний, умение предлагать пути по оптимизации созданного алгоритма или его отдельных блоков;

- умение применять свои знания в нестандартных ситуациях, оперирование всеми понятиями и осуществлять перенос полученных знаний на класс других задач (получение бесконечного множества объектов с помощью конечного выражения), при решении нестандартных задач, задач олимпиадного характера, умение сочетать знания из других предметов для решения задач.

Таким образом, формирование у обучающихся алгоритмического мышления может происходить в процессе овладения ими необходимыми знаниями и умениями на этапах работы с алгоритмом. Представим соотнесение этапов работы обучающихся по овладению алгоритмом и уровней развития алгоритмического мышления с необходимыми знаниями и умениями (Таблица 2).

Таблица 2

Соотнесение этапов работы по овладению алгоритмом и уровней развития

алгоритмического мышления с необходимыми знаниями и умениями

№	Этапы работы по овладению алгоритмом	Уровни развития алгоритмического мышления	Необходимые знания и умения
1	Введение алгоритма	Операционный уровень	<ul style="list-style-type: none"> • знание операций, входящих в структуру действия, на основе которых формируется алгоритм; • умение решать стандартные задачи по образцу; • умение выполнять отдельные операции, входящие в состав алгоритма, и умение применять их в отдельности;
2	Усвоение алгоритма	Системный уровень	<ul style="list-style-type: none"> • знание структуры действий – совокупности всех операций алгоритма; • умение применять основные операции в структуре действия; • умение выдвигать гипотезы по решению задач;
3	Применение алгоритма	Методологический уровень	<ul style="list-style-type: none"> • знание этапов выполнения алгоритма; • умение представлять алгоритм в модельном обобщении и предлагать пути по оптимизации созданного алгоритма; • умение преобразовывать известные схемы решения в нестандартных ситуациях; • умение применять алгоритм в нестандартных условиях и осуществлять его перенос на широкий класс задач.

Проведённое соотнесение позволяет сделать вывод о том, что каждому этапу работы по овладению алгоритмом соответствуют определённые знания и умения, необходимые для осуществления данных этапов и являющиеся критериями сформированности алгоритмического мышления [2].

Таким образом, было рассмотрено несколько определений понятия «алгоритмическое мышление», каждое из которых раскрывает лишь некоторые аспекты этого понятия. На основе этих определений было уточнено определение алгоритмического мышления, данное А. В. Копаевым. Кроме того, были выделены методы, входящие в алгоритмическое мышление, и структурные компоненты алгоритмического мышления, а также приведено обоснование важности формирования алгоритмического мышления. Также были выделены этапы работы по овладению алгоритмом, уровни развития алгоритмического мышления и критерии его сформированности и проведено

соотнесение между ними.

1.2. Особенности формирования алгоритмического мышления у учеников старших классов при обучении математике

Формирование алгоритмического мышления является важной составной частью педагогического процесса. Математика даёт реальные предпосылки для развития алгоритмического мышления благодаря всей своей системе, исключительной ясности и точности своих понятий, выводов и формулировок. Образовательная программа предусматривает формирование умений действовать по предложенному алгоритму, самостоятельно составлять план действий и следовать ему при решении учебных и практических задач, осуществлять поиск нужной информации, дополнять ею решаемую задачу, делать прикидку и оценивать реальность предполагаемого результата [1].

И. Н. Слинкина пишет [24, с. 46], что формирование алгоритмического мышления состоит из четырёх этапов:

- 1) пропедевтический (дошкольный возраст – 1 класс);
- 2) начальный (2 – 5 классы);
- 3) основной (5 – 9 классы);
- 4) специализированный (10 – 11 классы).

На каждом из этих этапов происходит формирование основных компонентов алгоритмического мышления, таких как: выбор данных для решения проблемы; пошаговое описание решения (разработка алгоритма); использование алгоритма при выполнении некоторых заданий практического и теоретического характера; анализ полученных результатов.

В подростковом и раннем юношеском возрасте, как пишет Р. С. Немов, завершается формирование когнитивных процессов, и прежде всего мышления. Психолог утверждает, что на уроках математики ученикам необходимо сначала находить и чётко формулировать принцип и последовательные шаги в решении задачи, а уже потом практически

приступать к реализации найденного решения. «Надо придерживаться правила: до тех пор, пока решение до конца не продумано в уме, пока не составлен план включённых в него действий и пока он не выверен на логичность, к практическому осуществлению решения не следует приступать», – пишет Р. С. Немов. Именно это способствует умению формировать внутренний план действий, что является одной из ключевых составляющих алгоритмического мышления [16, с. 211-213].

Психолог и педагог М. Н. Шардаков пишет [32, с. 177]: «Старшие школьники, опираясь на свой опыт мыслительной деятельности и приобретённые знания, пробуют самостоятельно объяснять и доказывать те или иные научные положения, а также явления окружающей действительности. <...> Возраст учащихся старших классов – это возраст возникновения проблем, рассуждений и дискуссий. Они ставят много вопросов учителю и себе. Для них дружить в значительной степени означает иметь товарищей для рассуждений и дискуссий. Всё это – показатели бурного роста у старших школьников критичности и самостоятельности мышления».

Учёные расходятся во мнениях относительно ведущего типа деятельности в юношестве. Одни делают акцент на смене ведущего типа деятельности в связи с погружением в учебно-профессиональную деятельность как ведущую. Выделяя мотивационный компонент в структуре деятельности как основной, другие определяют данный возрастной период развития как активное время развития мотивационной сферы личности: появления внутренней позиции как определения своего места в жизни, формирования морального сознания и самосознания, формирования мировоззрения [21, с. 8].

Одно из выдающихся качеств учеников старших классов заключается в их способности использовать широкий спектр мыслительных навыков для решения задач. Эти навыки представляют собой проявление мыслительных актов, которые отражают потенциальные реальности и возможности. При

включении данных навыков в процесс мышления старшеклассники не только находят решения для поставленных задач, но и развивают комбинаторный творческий подход к мышлению, объединяя образное и теоретическое мышление. В то время как младшие школьники переходят от рассмотрения реальности к рассмотрению возможности, у старших школьников мышление протекает в обе стороны – от реальности к возможности и обратно, от возможности к реальности [32, с. 118].

Умение обобщать играет важную роль в формировании алгоритмического мышления, поскольку алгоритм решения задач должен использоваться для решения класса задач – всех похожих задач, а не одной конкретной задачи. Развитие этого умения выражается в том, что постепенно всё больше устанавливается связь конкретного с общим и общего с конкретным. Если у младших школьников мысль не идёт от конкретного к понятийному, вновь вызывает конкретное, то у старших школьников конкретные представления появляются обычно на основе общего, абстрактного, их мысль движется от конкретного к общему, от общего – к конкретному [32, с. 127].

У старших школьников возрастает уровень мыслительной деятельности. «Старшеклассники и студенты часто задают вопросы, они склонны к установлению причинно-следственных связей. Их мыслительная деятельность более активна и самостоятельна. Они более критично относятся к содержанию получаемых знаний, меняется представление об интересности учебных предметов. Если подростки ценят занимательность, описательность, то в юношеском возрасте более интересен материал, требующий самостоятельного обдумывания, также ценится нестандартная подача материала», – пишет В. А. Кручинин. Одной из особенностей интеллектуального развития является тяга к обобщениям, поиску общих закономерностей. Ученики склонны к теоретизированию, созданию абстрактных теорий, их увлекают философские построения. Они заинтересованы в умственных играх и готовы

обсуждать сложные темы долгие часы. Появляются различные умственные интересы, которые иногда кажутся несвязанными. Многих удивляет страстное увлечение молодых людей, которые, поглощённые чем-то, часто не обращают внимание на другие аспекты жизни [11, с. 190].

В старшем школьном возрасте интенсивно формируется индивидуальный стиль мышления [34, с. 82]:

- конвергентное мышление – ориентация на однозначное решение проблемы, простое повторение усвоенных знаний и навыков, приверженность к авторитетным мнениям;
- дивергентное мышление – предполагает, что на один и тот же вопрос может быть множество одинаково правильных и равноправных ответов, способность подходить к решению каждой проблемы с разных сторон. С одной стороны – нужно освободиться от власти обыденных, часто неосознаваемых представлений и запретов, искать новые ассоциации, а с другой стороны – развитый самоконтроль, организованность, самодисциплинированность.

Необходимость запоминать алгоритм решения задачи лежит в основе усвоения алгоритма. В старшем юношеском возрасте происходит совершенствование памяти. Помимо того, что увеличивается объём памяти, происходят и существенные изменения в способах запоминания. Наряду с произвольным запоминанием старшие школьники имеют тенденцию искать и применять рациональные приёмы произвольного запоминания материала. Старшеклассники приобретают метакогнитивные умения (такие, как текущий самоконтроль и саморегуляция), которые, в свою очередь, влияют на эффективность их познавательных стратегий [31, с. 271].

Молодость – важный этап развития умственных способностей: существенно развивается теоретическое мышление, умение абстрагировать, делать обобщения. Происходят качественные изменения в познавательных возможностях: молодые люди часто проявляют нестандартный подход к

решению проблем и способны раскрывать глубокие знания, могут включать частные проблемы в более общие и т. п. Характерная черта в юношеском возрасте – склонность к преувеличению своих интеллектуальных возможностей, уровня знаний, умственных способностей. Некоторые старшеклассники склонны к преувеличению своих интеллектуальных способностей и стремятся к показной интеллектуальности. В старших классах появляются скучающие ученики: учёба им кажется прозаичной, по сравнению с подлинной жизнью, которую они видят и создают в своих мечтах и грёзах. Это объясняется рутинностью и монотонностью школьной жизни или же, с другой стороны, несформированностью учебной деятельности [11, с. 190].

Авторы [34, с. 81] называют следующие характеристики старшего школьного возраста:

1. Умение длительное время удерживать внимание на отвлечённом, логически организованном материале (слушают доказательство теорем).

2. Интеллектуализация процессов восприятия (недостаточно просто «видеть» чертёж, нужно уметь его «читать»). Значимая информация может быть извлечена только при умственной работе с материалом, когда выделяются определённые связи и зависимости.

3. У подростка необходимо создавать установку на размышления при выполнении учебно-практических заданий.

4. Память в подростковом периоде развивается в направлении интеллектуализации (в отличие от младшего школьного возраста – установка на запоминание).

5. Центральное место начинает занимать анализ содержания материала, его своеобразия и внутренней логики.

Формирование алгоритмического мышления, как и обучение математике в целом, невозможно без формирования умения анализировать и синтезировать информацию. Про развитие данных умений в старшем школьном возрасте И. В. Шаповаленко пишет [31, с. 271]: «Совершенствуется

владение сложными интеллектуальными операциями анализа и синтеза, теоретического обобщения и абстрагирования, аргументирования и доказательства. Для юношей и девушек становятся характерными установление причинно-следственных связей, систематичность, устойчивость и критичность мышления, самостоятельная творческая деятельность. Возникает тенденция к обобщённому пониманию мира, к целостной и абсолютной оценке тех или иных явлений действительности».

Н. И. Вьюнова считает, что, принимая во внимания возрастные морфофункциональные особенности, необходимо обратить внимание на созревание всей структуры нервной системы, определяющей важные когнитивные функции старшеклассника. Она пишет: «Становление ассоциативных структур лобных отделов коры больших полушарий, способствующие реализации сложных эмоциональных актов, сознания и самосознания, в ранней юности достигает оптимального уровня, но завершение созревания наступает к концу юношеского периода. Кроме того, данный период характеризуется созреванием первой сигнальной системы (конкретного мышления), а также второй сигнальной системы (абстрактного мышления)». По завершении полового созревания происходит созревание всех отделов нервной системы, и это приводит к гармонизации корковых и подкорковых процессов, положительным образом сказывается на внимании, восприятии, памяти и эмоциях. Старший школьный возраст, с точки зрения психологии, имеет ряд важных особенностей, которые необходимо учитывать. Когнитивное формирование личности в ранней юности достигает своего высокого уровня: за счёт приобретения жизненного опыта процессы памяти и мышления становятся критическими и системными, что является важным компонентом в реализации, например, проектно-исследовательской деятельности [4].

Как утверждает М. Н. Шардаков [32, с. 112], законы и правила – собственно, алгоритмы – «при решении математических задач могут

осознаваться и не осознаваться, а сам процесс мышления может протекать в свёрнутом виде. При этом свёрнутое течение мышления при решении указанных задач чаще встречается у старших школьников». Не всегда «свёрнутость» мышления является положительным аспектом: то, что ученики могут неосознанно выполнять некоторые действия (применять правила), может повлечь упущение этих действий в будущем при решении более сложных задач, вследствие чего возникнет непонимание и невыполнение алгоритма решения в полной мере. Эта особенность мышления учеников старших классов в некоторых случаях может являться препятствием к формированию алгоритмического мышления.

Таким образом, были выделены возрастные особенности учеников старших классов, влияющие на процесс формирования у них алгоритмического мышления. Именно в этом возрасте у учащихся совершенствуется владение операциями анализа и синтеза, развивается умение обобщать. У них совершенствуется память путём увеличения её объёма и применения приёмов произвольного запоминания, проявляется самостоятельность мышления, суждений. Кроме того, старшеклассники имеют тенденцию к теоретизированию, созданию абстрактных теорий. У них появляются новые интересы, внутренняя мотивация к деятельности.

Выводы по Главе 1

Анализ литературных источников по теме исследования позволил уточнить понятие «алгоритмическое мышление». В рамках настоящего исследования принимается следующее определение: алгоритмическое мышление – это совокупность мыслительных приёмов, методов и действий, которые направлены на применение известных и создание новых алгоритмов, способствующих решению теоретических и практических задач.

Этапы работы по овладению алгоритмом можно соотнести с уровнями развития алгоритмического мышления: этапу «Введение алгоритма» соответствует операционный уровень, этапу «Усвоение алгоритма» –

системный уровень, этапу «Применение алгоритма» – методологический уровень.

Формирование алгоритмического мышления эффективно при обучении учеников старших классов. Именно в этом возрасте у учащихся совершенствуется владение операциями анализа и синтеза, развивается умение обобщать. У них совершенствуется память путём увеличения её объёма и применения приёмов произвольного запоминания, проявляется самостоятельность мышления, суждений. Кроме того, старшеклассники имеют тенденцию к теоретизированию, созданию абстрактных теорий. У них появляются новые интересы, внутренняя мотивация к деятельности.

Глава 2. Практические аспекты формирования алгоритмического мышления учащихся при решении задач на построение сечений

2.1. Задачи на построение сечений как средство формирования алгоритмического мышления

Согласно Федеральной образовательной программе среднего общего образования [19], к концу 10 класса ученик, изучающий математику на базовом уровне, научится объяснять принципы построения сечений, используя метод следов; строить сечения многогранников методом следов; строить сечения тел вращения. При изучении математики на углублённом уровне к методу следов также добавляются метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей плоскости. Использование всех трёх методов требует применения алгоритмов.

При построении сечений следующие теоретические положения являются основными [15, с. 356]:

- 1) если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку;
- 2) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости;
- 3) если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и линию пересечения плоскостей;
- 4) если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны, поэтому секущая плоскость пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым;
- 5) если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой;
- 6) если прямая l параллельна какой-либо прямой m , проведённой в

плоскости, то она параллельна и самой плоскости;

7) если прямая, лежащая в плоскости сечения, не параллельна плоскости некоторой грани, то она пересекается со своей проекцией на эту грань.

Суть общего принципа построения сечений на проекционном чертеже заключается в том, что сечение какой-либо фигуры плоскостью можно задавать тремя точками и искать на какой-либо проецирующей прямой четвёртую точку. При этом следует целесообразно выбрать основную плоскость и направление проецирующих прямых [7, с. 107].

Рассмотрим подробнее каждый метод построения сечений.

Метод следов

Чтобы описать этот метод, прежде всего необходимо определить, что называется секущей плоскостью и сечением многогранника. Секущая плоскость – это плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Сечение многогранника – это многоугольник со сторонами, полученными при пересечении секущей плоскости с гранями многогранника.

В сечении многогранника всегда получается многоугольник, вершины которого принадлежат рёбрам многогранника. Число сторон сечения меньше или равно количеству граней данного многогранника [7, с. 107].

Суть метода [27, с. 5]:

- строится прямая XU , по которой секущая плоскость пересекает плоскость основания (прямая XU называется следом секущей плоскости в плоскости основания), а затем
- находятся точки пересечения XU с прямыми, на которых лежат стороны основания (тем самым в плоскостях боковых граней получаются дополнительные точки, принадлежащие секущей плоскости).

На Рис. 1 проиллюстрировано использование метода следов для построения сечения куба $ABCDIJKL$ по трём данным точкам E , F и G , находящимся на рёбрах многогранника.

Алгоритм построения:

1. Сначала были соединены точки, принадлежащие одной грани – E и F , F и G .

2. После этого EF и FG были продлены до пересечения с плоскостью $KLIJ$ (точки H и M , соответственно), что и является следами.

3. Поскольку H и M принадлежат одной плоскости, их также соединили. Точки пересечения отрезка HM с рёбрами куба KJ и IJ отмечены как N и O , соответственно.

$EFGON$ – искомое сечение.

В основе метода решения задач на построение сечений многогранников методом следов лежит задача на построение точки пересечения данной прямой с данной плоскостью [7, с. 109].

При построении сечений методом сечений важно следующее [7, с. 109]:

- построение следа секущей плоскости, если он не задан, является основным этапом в решении задачи;
- построение следа является возможным, если определяемая плоскость не параллельна основной плоскости и её след не выходит за поле листа бумаги.

Вначале ученикам следует давать упражнения, когда две заданные точки принадлежат рёбрам одной грани, затем – рёбрам различных граней и только после этого граням [22, с. 192].

Метод внутреннего проектирования

Данный метод удобно применять, если след секущей плоскости лежит за пределами листа бумаги, на котором изображён многогранник [27, с. 9].

В качестве основной плоскости удобнее выбирать плоскость основания, в качестве внутреннего проецирования для призм – параллельное, для пирамид – центральное [7, с. 104].

Метод внутреннего проектирования состоит в том, что для построения

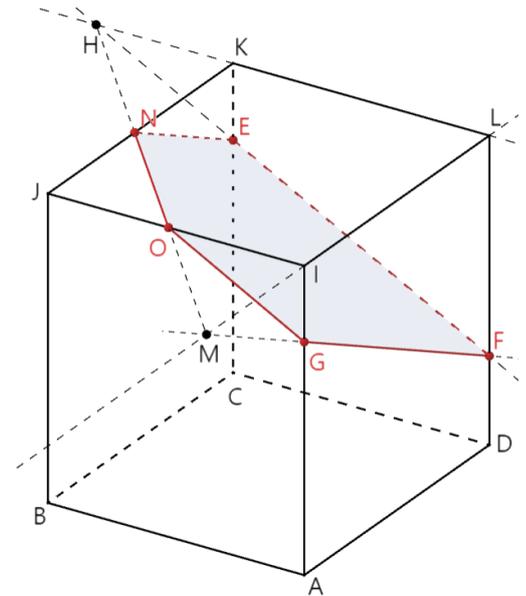


Рис. 1. Метод следов

сечения первоначально строятся те точки нижнего основания многогранника, которые взаимно однозначно соответствуют точкам искомого сечения [7, с. 110].

Суть метода: если секущая плоскость задана тремя точками A, B, C и надо построить четвёртую точку сечения X (например, точку пересечения секущей плоскости с боковым ребром), то в плоскости основания многогранника строят проекции A_0B_0 и C_0X_0 двух пересекающихся отрезков AB и CX , а вслед за этим находят и точку X [27, с. 9].

Из этого следует такой алгоритм соответствующего построения [7, с. 110]:

I этап. Отметить на плоскости основания четыре точки: три проекции трех точек, определяющих плоскость сечения, и одну надлежащим образом выбранную вершину основания (многогранника), которая должна служить проекцией одной из вершин сечения.

II этап. Провести диагонали отмеченного четырёхугольника.

III этап. На плоскости сечения (вернее, на одной из её прямых) построить точку, проекцией которой служит точка пересечения диагоналей.

IV этап. Используя свойство инцидентности точки и прямой (инвариантное как при параллельном, так и при центральном проецировании) найти искомую четвертую точку-оригинал, являющуюся одной из вершин сечения.

Аналогично находятся все остальные точки – вершины искомого сечения.

Как и в случае метода следов, необходимо пользоваться параллельным проецированием в случае призм и центральным проецированием для пирамид.

На Рис. 2 проиллюстрировано применение метода внутреннего проектирования для построения сечения куба $ABCDIJKL$ по трём данным точкам E, F и G , находящимся на рёбрах многогранника.

Алгоритм построения:

1. Сначала были соединены точки, принадлежащие одной грани – E и F , F и G , а также E и G . Параллельными проекциями точек E , F , G и неизвестной точки N , принадлежащей прямой JB , на плоскость основания $ABCD$ являются, соответственно, точки C , D , A и B .

2. Затем соединены точки A и C , B и D , их точка пересечения обозначена как M_0 . Параллельная проекция точки M_0 на плоскость искомого сечения обозначена как M ($M \in EG$).

3. Для нахождения точки N точку M соединили с F , прямую продлили до пересечения с прямой JB .

4. Соединив точки N и E , N и G получили точки пересечения с рёбрами KJ и IJ – P и O , соответственно.

$EFGOP$ – искомое сечение.

В основе метода внутреннего проектирования лежит задача на построение точки пересечения секущей плоскости с любой проецирующей прямой [7, с. 110].

Применение данного метода предполагает владение умением находить те фигуры, в которые переходят данные фигуры при заданном проектировании и обратно. Поэтому целесообразно перед решением задач на построение сечений многогранников методом внутреннего проектирования выполнить упражнения на формирование этих умений [2322, с. 196].

Метод переноса секущей плоскости

При использовании этого метода вместо секущей плоскости строится параллельная ей вспомогательная плоскость, которая пересекает все три грани некоторого трёхгранного угла данного многогранника. Далее путём

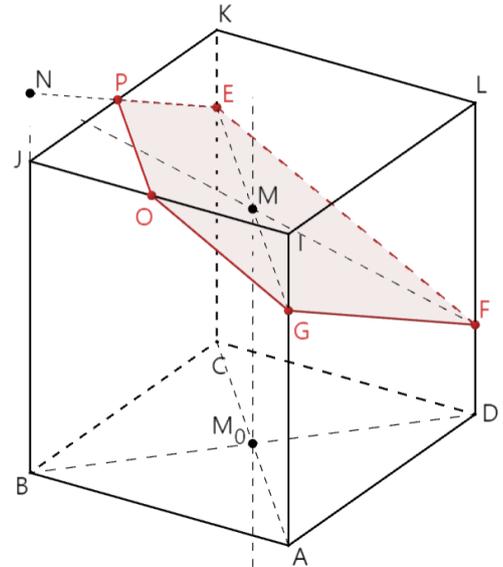


Рис. 2. Метод внутреннего проектирования

параллельного переноса строятся некоторые линейные элементы искомого сечения, соответствующие легко строящимся элементам вспомогательной плоскости [20, с. 63].

На Рис. 3 проиллюстрировано использование метода переноса секущей плоскости для построения сечения куба $ABCDIJKL$ по трём данным точкам E , F и G , находящимся на рёбрах многогранника.

Алгоритм построения:

1. Сначала были соединены точки, принадлежащие одной грани – E и F , F и G .

2. Из точки A , являющейся параллельной проекцией точки G на плоскость основания куба $ABCD$, была построена прямая, параллельная GF . Точка пересечения построенной прямой с прямой LD обозначена как H и является проекцией точки F .

3. Затем из точки H была построена прямая, параллельная EF , а точка пересечения с прямой KM , являющаяся проекцией точки E , обозначена как M . MNA – вспомогательная плоскость, параллельная искомой и образующая треугольник с плоскостью основания.

4. Были соединены точки B и D , пересечение с MA обозначено как N . N и H также соединены, а из точки F построена прямая, параллельная NH .

5. Точка пересечения построенной прямой с прямой JB обозначена как O . Соединив точки O и E , O и G получили точки пересечения с рёбрами KJ и IJ – P и Q , соответственно.

$EFGQP$ – искомое сечение.

Для контроля правильности построенного сечения необходимо проверять следующее:

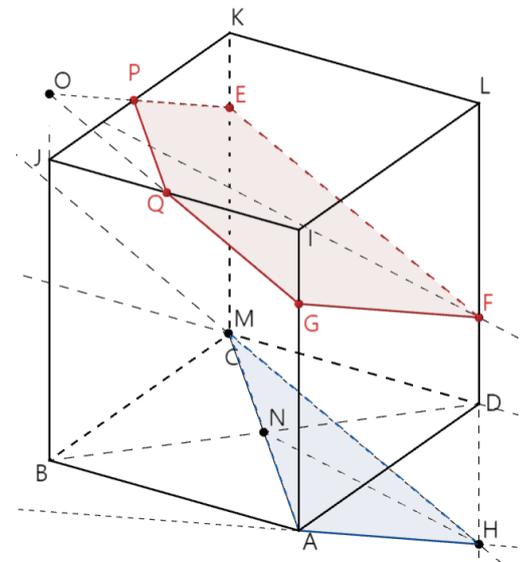


Рис. 3. Метод переноса секущей плоскости

- все вершины сечения лежат на рёбрах многогранника;
- все стороны сечения лежат в гранях многогранника;
- в каждой грани многогранника лежит не более одной стороны сечения;
- число сторон сечения не больше, чем количество граней данного многогранника.

Соответственно, обучающиеся вне зависимости от выбранного метода построения могут совершать следующие ошибки:

- вершины сечения лежат в грани многогранника;
- вершины сечения лежат вне многогранника;
- вершины сечения лежат внутри многогранника;
- сторона сечения лежит вне многогранника;
- сторона сечения лежит внутри многогранника;
- сторона сечения частично лежит вне и / или внутри многогранника;
- в грани многогранника лежит несколько сторон многогранника (отделённых друг от друга или соединённых в ломаную);
- число сторон сечения больше количества граней многогранника.

Важно отметить: вне зависимости от выбора метода построения сечение будет одинаковым, что видно из Рис. 1, Рис. 2 и Рис. 3.

Умение строить сечения проверяется в задании № 14 ЕГЭ по математике профильного уровня. Согласно анализу ЕГЭ 2023 года, стереометрическая задача может отнимать у выпускника большое количество времени, предположительно, вследствие того, что ученик не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках. Даже наиболее подготовленные участники, которые заранее планируют время и выстраивают тактику решения задач на экзамене, часто относят решение стереометрической задачи на оставшееся время. Отработка стандартных алгоритмов построения сечения остаётся неиспользованным ресурсом повышения уровня математической подготовки выпускников [35, с. 17].

Задачи на построение сечений могут быть одним из средств формирования алгоритмического мышления. Для успешного решения такой задачи необходимо разбивать её на подзадачи и применять алгоритмический подход для последовательного решения каждого этапа.

Каждый из методов построения сечений подразумевает некий алгоритм, следуя которому можно построить сечение любого многогранника. Умение выполнять готовые предписания – один из основных компонентов алгоритмического мышления.

У задачи на построение сечений есть набор определённых условий, согласно которым может быть получен единственный результат. Однако для достижения результата – изображения сечения – могут быть использованы разные способы, или алгоритмы, построения. Умение выбирать наиболее оптимальный алгоритм – часть алгоритмического мышления.

При решении задач на построение сечений, как и любых других геометрических задач, необходимо анализировать условие – текст задачи, если задача текстовая, или чертёж, если это задача по готовому чертежу. Умение анализировать – важный компонент алгоритмического мышления.

Кроме того, решение задач на построение сечений требует умения работать с различными геометрическими принципами и правилами, что также способствует формированию алгоритмического мышления. Эти задачи требуют точности, логики и внимания к деталям, что помогает формированию аналитических навыков и умения решать сложные задачи.

Умение мыслить абстрактно также необходимо для успешного решения задач на построение сечений. Трёхмерное изображение находится в двухмерном пространстве – на листе бумаги, ученики не могут взять геометрическое тело в руки и разрезать его, чтобы посмотреть, какое сечение образуется. Следовательно, им необходимо уметь мысленно представлять то, как будет выглядеть сечение многогранника, если смотреть на него под определённым углом.

Таким образом, были рассмотрены такие методы построения сечений, как метод следов, метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей плоскости. Были приведены алгоритмы построения сечений при использовании данных методов, описаны общие черты методов и их отличительные особенности, указаны возможные ошибки при построении сечений. Задачи на построение сечений могут быть одним из средств формирования алгоритмического мышления учащихся старших классов. Следовательно, необходимо выделить требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений каждым из трёх методов, в соответствии с возрастными особенностями учеников 10-11-х классов.

2.2. Требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений

Поскольку ученики старших классов часто не осознают выполняемые ими действия – есть ли в них необходимость, с какой целью они выполняются, что должно получиться в результате выполнения, – при формировании алгоритмического мышления могут возникнуть трудности. Обучающиеся могут испытывать трудности при объяснении причин построения того или иного «лишнего» элемента, опираясь на предыдущий опыт, где аналогичное построение было необходимо для достижения результата. Так как при изменении условия задачи может измениться и алгоритм её решения, каждый шаг, ведущий к достижению результата, должен быть осознанным. Поэтому для формирования алгоритмического мышления необходимы задания, связанные с обоснованием необходимости выполнения того или иного действия при решении задач.

В старшем школьном возрасте мышление становится более критичным: ученики могут оценивать свою и чужую деятельность, выявлять ошибки и исправлять их. Вследствие этого важную роль в формировании

алгоритмического мышления могут играть задания на нахождение и исправление ошибок в алгоритме.

В этом возрасте дети в равной мере могут пользоваться как индуктивными, так и дедуктивными умозаключениями. Это позволяет расширить круг задач, которые они могут решить: ученики могут как воспользоваться общим алгоритмом при выполнении конкретной задачи (например, применить общий алгоритм построения сечений методом следов для данной призмы), так и из частных алгоритмов получить общий (например, из алгоритма построения сечения конкретного параллелепипеда получить алгоритм, подходящий для всех параллелепипедов). Соответственно, подобные задания могут помочь в формировании алгоритмического мышления.

Старшеклассники должны научиться не только действовать по готовым алгоритмам, но и составлять собственные. Прежде чем приступать к построению сечений, необходимо разработать план построения, поэтому среди заданий, способствующих формированию алгоритмического мышления, должны быть задания, направленные на составление собственных алгоритмов.

В параграфе 1.1 были выделены этапы работы с обучающимися по овладению алгоритмом, уровни развития алгоритмического мышления и индикаторы этих уровней, а также проведено соотнесение между ними (Таблица 2). Приведём примеры формулировок заданий, направленных на формирование выделенных умений при овладении алгоритмом и, соответственно, формирование алгоритмического мышления (Таблица 3).

Таблица 3

Формулировки заданий, направленных на овладение алгоритмом

№	Этапы работы по овладению алгоритмом	Уровни развития алгоритмического мышления	Формулировки заданий
1	Введение алгоритма	Операционный уровень	<ul style="list-style-type: none"> • назовите операции, входящие в состав алгоритма;

			<ul style="list-style-type: none"> • выполните по отдельности каждое действие с представленными исходными данными;
2	Усвоение алгоритма	Системный уровень	<ul style="list-style-type: none"> • восстановите правильную последовательность действий алгоритма; • определите недостающие действия алгоритма; • выполните действия алгоритма и обоснуйте их необходимость;
3	Применение алгоритма	Методологический уровень	<ul style="list-style-type: none"> • на основе изученного алгоритма сформулируйте правило; • на основе изученного алгоритма составьте аналогичный алгоритм; • упростите алгоритм; • дополните (сократите) алгоритм, если изменится условие задачи; • найдите ошибки в применении алгоритма, объясните, на каком этапе выполнения алгоритма были совершены выявленные вами ошибки, и исправьте их.

Поскольку в школьном курсе геометрии изучаются три метода построения сечений – метод следов, метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей плоскости, – задания, направленные на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений, также должны быть направлены на отработку умений пользоваться этими методами.

Также при подборе заданий и задач необходимо ориентироваться и на их сложность. Так, для этапов «введение алгоритма» и «усвоение алгоритма» следует использовать задачи на построение сечений основных многогранников: пирамиды, призмы, параллелепипеда, куба, – поскольку задания этих этапов рассчитаны на базовый уровень усвоения темы и, следовательно, использование алгоритмов в знакомых ситуациях, а для этапа «применение алгоритма» следует добавить и задачи, в которых используются более сложные многогранники (например, состоящие из нескольких основных или содержащие различные отверстия), так как на данном этапе необходимо использовать нестандартные задачи.

С учётом возрастных особенностей учеников старших классов, на основе

примерных формулировок заданий и соотнесения этапов работы по овладению алгоритмом и уровней развития алгоритмического мышления с необходимыми знаниями и умениями можно сформулировать следующие требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений:

1. Задания должны соответствовать трём этапам работы по овладению алгоритмом: введение алгоритма, усвоение алгоритма и применение алгоритма.

2. Задания, соответствующие этапу «введение алгоритма», должны быть направлены на формирование умения решать стандартные задачи по образцу; умения выполнять отдельные операции, входящие в состав алгоритма.

3. Задания, соответствующие этапу «усвоение алгоритма», должны быть направлены на формирование умения воспроизводить алгоритм; умения определить недостающий элемент (слово или действие) в готовом алгоритме; умение восстанавливать правильную последовательность действий в алгоритме; умения применять основные операции в структуре действия; умения обосновывать необходимость выполнения того или иного действия при решении задач.

4. Задания, соответствующие этапу «применение алгоритма», должны быть направлены на формирование умения оптимизировать алгоритм; умения формулировать правило на основе изученного алгоритма; умения составлять алгоритм, аналогичный изученному; умения составлять частный алгоритм на основе общего и общий на основе частного; умения находить ошибки в выполнении алгоритма, обосновывать свой ответ и исправлять найденные ошибки.

5. Задания должны быть направлены на отработку умения строить сечения методом следов, методом внутреннего проектирования и методом переноса секущей плоскости.

6. Задания, соответствующие этапам «введение алгоритма» и «усвоение

алгоритма», должны содержать знакомые ситуации построения базовых многогранников: пирамиды, призмы, параллелепипеда, куба.

7. Задания, соответствующие этапу «применение алгоритма», должны содержать незнакомые ситуации, подразумевающие построение сечений нестандартных многогранников.

Таким образом, были выделены этапы работы по овладению алгоритмом, уровни развития алгоритмического мышления и критерии его сформированности, а также проведено соотнесение между ними и приведены примерные формулировки заданий, направленных на овладение алгоритмом. Было сформулировано четыре требования для отбора заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления, и в соответствии с ними можно составить комплект заданий.

2.3. Комплект заданий по теме «Построение сечений», направленных на формирование алгоритмического мышления

Комплект состоит из трёх блоков: «Метод следов», «Метод внутреннего проектирования», «Метод переноса секущей плоскости». В каждом блоке содержится 9 заданий.

Задания каждого блока разбиты на три раздела в соответствии с этапами работы по овладению алгоритмом: «Введение алгоритма» (2 задания), «Усвоение алгоритма» (2 задания), «Применение алгоритма» (5 заданий). В каждом из трёх разделов перечислены знания и умения, необходимые для успешного выполнения заданий раздела.

Сборник направлен на отработку следующих умений:

1. Строить сечения многогранников.
2. Использовать методы построения сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования, метод переноса секущей плоскости.

Метод следов

1. Введение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание способов задания плоскости.

Задания:

1. Назовите операции, входящие в алгоритм построения сечений методом следов.

2. Выполните действия по чертежу (Рис. 4):

1) соединить точки, которые лежат в одной плоскости: I и J , J и K ;

2) продлить IJ и AD до их пересечения, обозначить точку пересечения как M ;

3) продлить JK и CD до их пересечения, обозначить точку пересечения L ;

4) соединить точки M и L ;

5) обозначить точки пересечения ML с рёбрами AB и BC как N и O ;

6) сравнить с Рис. 5.

$IJKON$ – искомое сечение.

II. Усвоение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- овладение совокупностью операций алгоритма построения сечений методом следов;

- умение применять отдельные операции, входящие в состав алгоритма построения сечений методом следов.

Задания:

1. Определите недостающие действия алгоритма:

Алгоритм построения сечений методом следов:

1) выяснить, находятся ли в какой-либо из граней две точки сечения (если да, то _____);

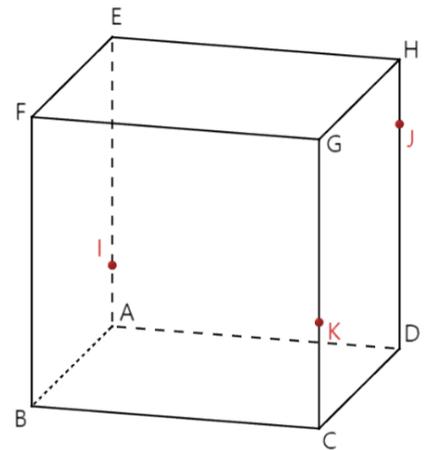


Рис. 4

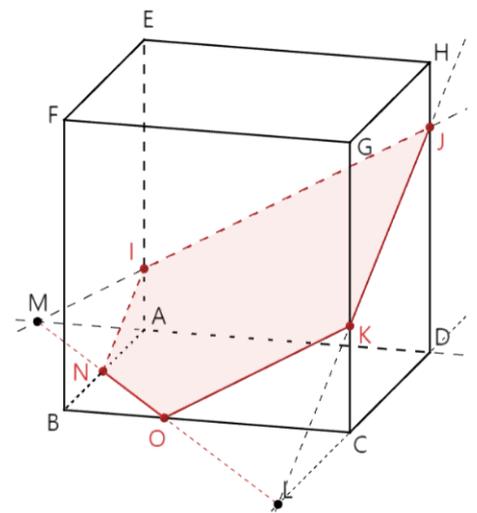


Рис. 5

2) построить след сечения на плоскости основания многогранника;

3) _____;

4) через полученную дополнительную точку на следе и точку сечения в выбранной грани провести прямую, отметить точки пересечения её с рёбрами грани;

5) выполнить п.1.

2. Восстановите порядок действий алгоритма построения сечения методом следов через данные точки A , E и G (Рис. 6):

1) соединить точки _____ и _____, _____ и _____;

2) продлить _____ до пересечения с прямой _____, точку пересечения обозначить как _____;

3) соединить точки _____ и _____, точку пересечения с ребром _____ обозначить как _____.

_____ – искомое сечение.

3. Постройте сечение треугольной призмы методом следов, если: а) сечение проходит через ребро CC_1 и данную точку (Рис. 7); б) сечение проходит через три данные точки (Рис. 8). Запишите алгоритм построения. Обоснуйте каждый шаг алгоритма.

III. Применение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание этапов выполнения алгоритма построения сечений методом следов;

- умение преобразовывать алгоритм в правило;

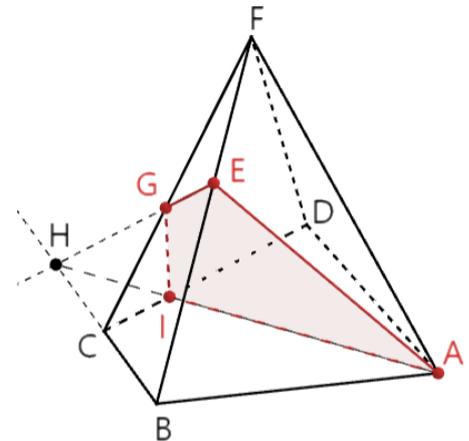


Рис. 6

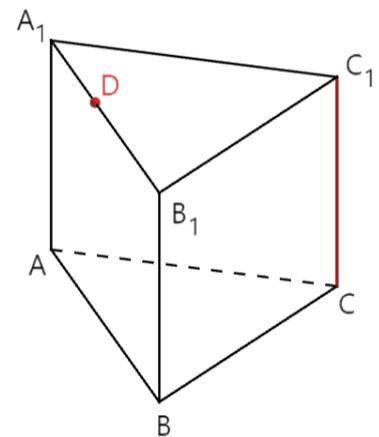


Рис. 7

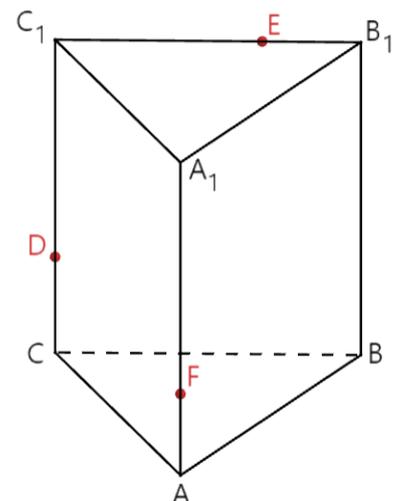


Рис. 8

- умение составлять частный алгоритм на основе общего;
- умение применять алгоритм построения сечений методом следов при решении задач;
- умение находить ошибки, допущенные при построении сечений методом переноса секущей плоскости.

Задания:

1. Запишите алгоритм построения сечения пятиугольной призмы методом следов, проходящего через 3 точки, находящиеся на боковых рёбрах.

2. Дополните или сократите алгоритм, составленный в № 1, при условии, что необходимо построить сечение не пятиугольной, а четырёхугольной призмы, а одна из данных точек, через которые проходит сечение, принадлежит боковой грани.

3. Найдите ошибки при построении сечений методом следов (Рис. 9), поясните свой ответ и постройте сечения правильно.

4. Дана пирамида $SABCDEF$. Постройте сечение, проходящее через ребро SC и точку K , лежащую на ребре EF .

5. Постройте сечение многогранника методом следов, если: а) сечение проходит через ребро SB_1 и точку $E \in CDD_1C_1$ (Рис. 10); б) сечение проходит через отрезок C_1A и точку $M \in E_1F_1FE$ (Рис. 11).

Метод внутреннего проектирования

1. Введение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание способов задания плоскости.

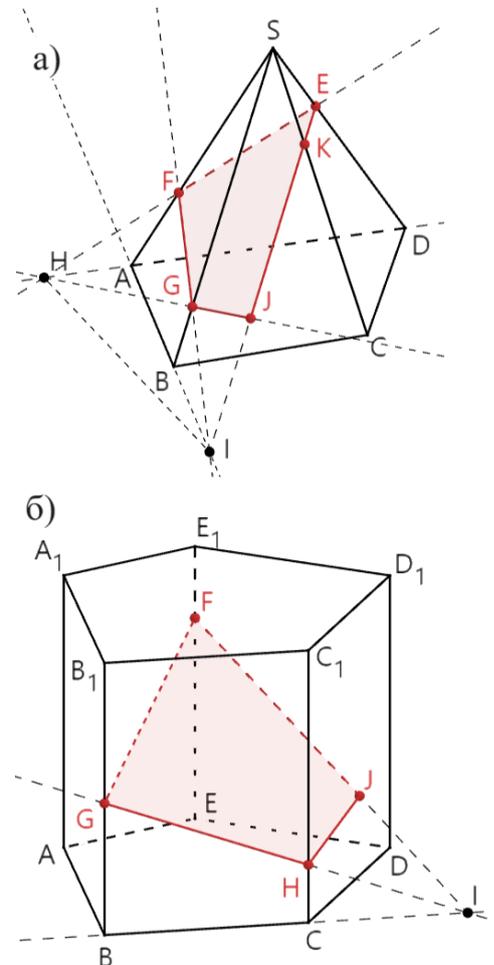


Рис. 9

Задания:

1. Назовите операции, входящие в алгоритм построения сечений методом внутреннего проектирования.

2. Выполните действия по чертежу (Рис. 12):

1) соединить точки H и F ;

2) соединить центральные проекции точек H и F на основание – точки E и C ;

3) соединить центральные проекции точки G и неизвестной точки $J \in SD$ на основание – точки A и D ;

4) обозначить точку пересечения отрезков EC и AD как M_0 ;

5) соединить M_0 с вершиной пирамиды S , точку пересечения с отрезком HF обозначить как M ;

6) соединить точки G и M , продлить до пересечения с ребром SD , обозначить точку пересечения как J ;

7) выполнить п. 1-2 для точек F и G ;

8) выполнить п. 3-6 для неизвестной точки $I \in SB$, обозначая точки пересечения как N_0 (п. 4), N (п. 5) и I (п. 6);

9) сравнить с Рис. 13.

$HJFIG$ – искомое сечение.

II. Усвоение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- овладение совокупностью операций

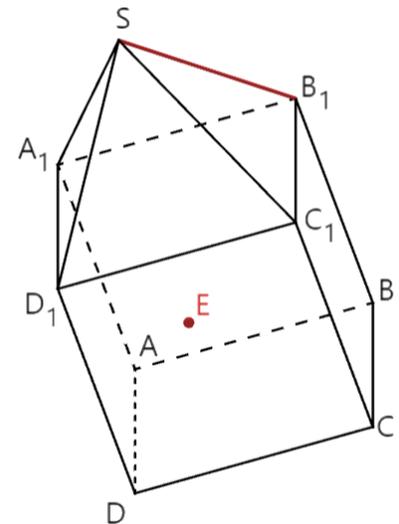


Рис. 10

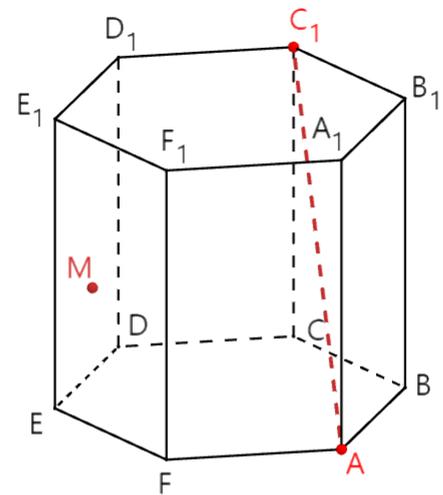


Рис. 11

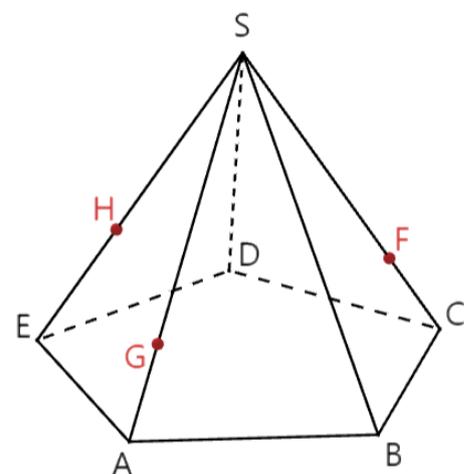


Рис. 12

алгоритма построения сечений методом внутреннего проектирования;

- умение применять отдельные операции, входящие в состав алгоритма построения сечений методом внутреннего проектирования.

Задания:

1. Восстановите правильную последовательность действий алгоритма:

- на плоскости сечения построить точку, проекцией которой служит точка пересечения диагоналей;
- используя свойство инцидентности точки и прямой (инвариантное как при параллельном, так и при центральном проецировании) найти искомую четвертую точку-оригинал, являющуюся одной из вершин сечения;
- отметить на плоскости основания четыре точки: три проекции трех точек, определяющих плоскость сечения, и одну надлежащим образом выбранную вершину основания (многогранника), которая должна служить проекцией одной из вершин сечения;
- провести диагонали отмеченного четырёхугольника.

2. Восстановите последовательность действий алгоритма построения сечения методом внутреннего проектирования через данные точки E , G и H (Рис. 14):

- 1) соединить точки ___ и ___;
- 2) соединить _____ проекции точек ___ и ___ на основание – точки ___ и ___;
- 3) соединить _____ проекции точки ___ и неизвестной точки ___ на основание – точки ___ и ___;

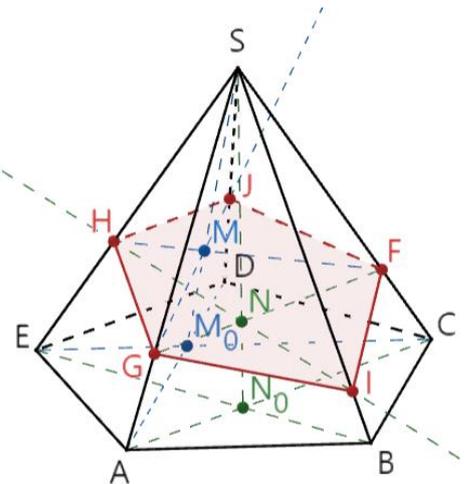


Рис. 13

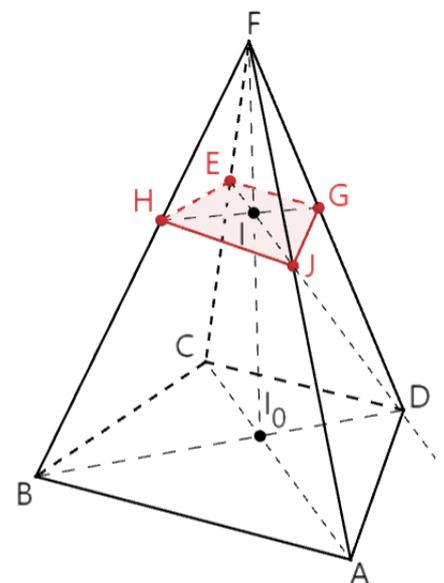


Рис. 14

4) обозначить точку пересечения отрезков, построенных в п. 2-3, как ___;

5) соединить точку ___ с вершиной F , точку пересечения с отрезком _____ обозначить как ___;

6) соединить точки ___ и ___, продлить до пересечения с ребром _____, точку пересечения обозначить как ___;

_____ – искомое сечение.

3. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда методом внутреннего проектирования, если: а) сечение проходит через данную точку F и отрезок $BE \in BCKJ$ (Рис. 15); б) сечение проходит через три данные точки (Рис. 16). Запишите алгоритм построения. Обоснуйте каждый шаг алгоритма.

III. Применение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание этапов выполнения алгоритма построения сечений методом внутреннего проектирования;

- умение составлять новый алгоритм на основе изученного;

- умение применять алгоритм построения сечений методом внутреннего проектирования при решении задач;

- умение находить ошибки, допущенные при построении сечений методом внутреннего проектирования.

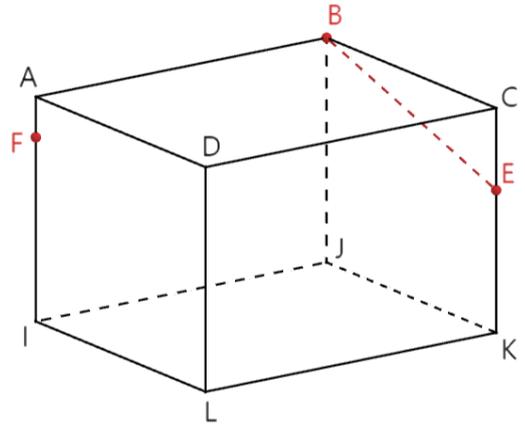


Рис. 15

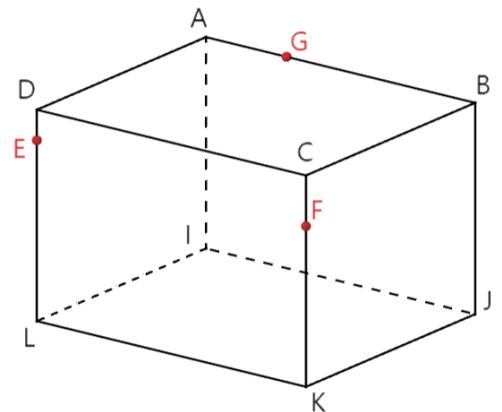


Рис. 16

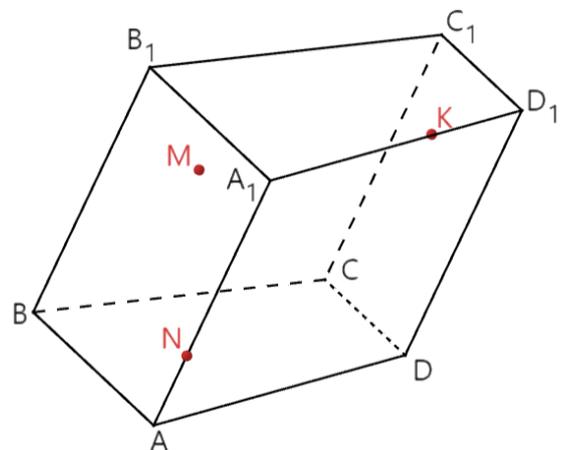


Рис. 17

Задания:

1. На основе алгоритма построения сечений методом внутреннего проектирования для пирамиды составьте аналогичный алгоритм для призмы.

2. Дано изображение четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точки K на грани $CDD_1 C_1$, точки N на ребре AA_1 и точки M , лежащей внутри призмы (Рис. 17). Постройте сечение этой призмы плоскостью MNK , используя метод внутреннего проектирования.

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вырезали куб $KLMNK_1 L_1 M_1 N_1$. Постройте сечение, заданное точками E, F и G (Рис. 18), используя метод внутреннего проектирования.

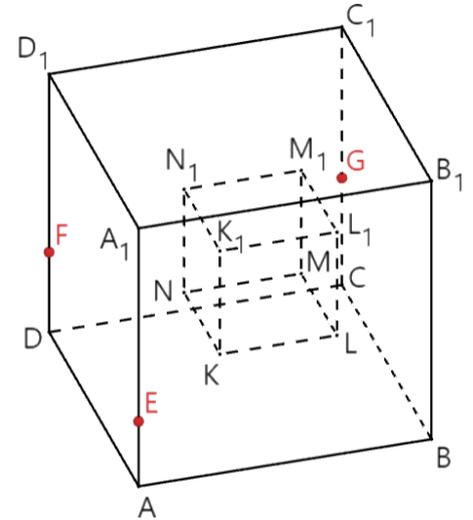


Рис. 18

4. Найдите ошибки при построении сечений методом внутреннего проектирования (Рис. 19), поясните свой ответ и постройте сечения правильно.

5. В грани $ABCD$ призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ задана точка P . Постройте сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую $D_1 P$, параллельно прямой $B_1 D$ и плоскостью, проходящей через прямую $B_1 D$, параллельно прямой $D_1 P$; б) плоскостью, проходящей через прямую $A_1 P$, параллельно прямой DB_1 и плоскостью, проходящей через прямую DB_1 параллельно прямой $A_1 P$; в) плоскостью, проходящей через прямую

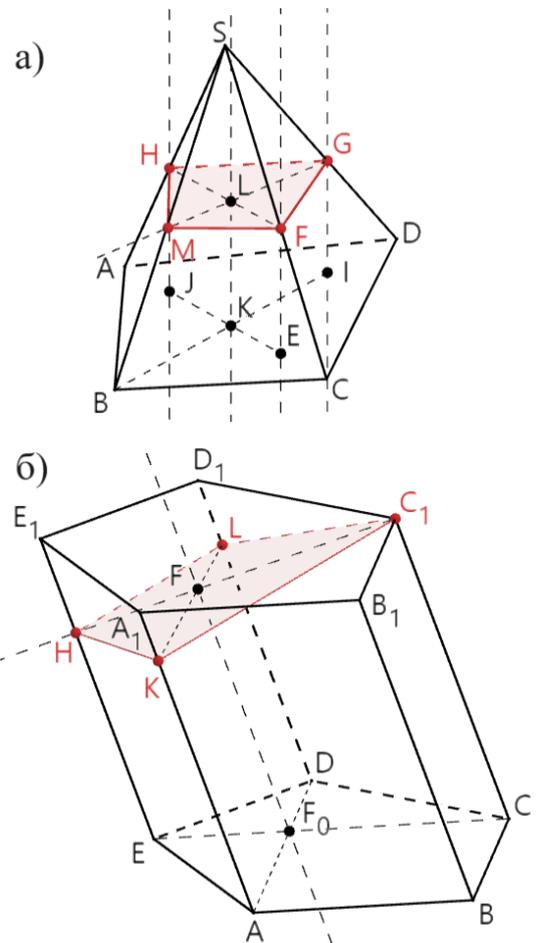


Рис. 19

B_1P , параллельно прямой A_1C и плоскостью, проходящей через прямую A_1C параллельно прямой B_1P .

Метод переноса секущей плоскости

1. Введение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание способов задания плоскости;
- умение использовать параллельный перенос.

Задания:

1. Назовите операции, входящие в алгоритм построения сечений методом переноса секущей плоскости.

2. Выполните действия по чертежу (Рис. 20):

1) соединить точки F и G , F и E ;

2) построить отрезки $CH \parallel GF$ ($H \in BJ$) и $NM \parallel FE$ ($M \in AB$);

3) соединить точки M и C , B и D , точку пересечения обозначить как N ;

4) соединить точки H и N ;

5) из точки F построить прямую, параллельную отрезку HN ;

6) продлить ребро LD до пересечения с построенной в п. 5 прямой, точку пересечения обозначить как O ;

7) соединить точки G и O , точку пересечения с ребром CD обозначить как P ;

8) соединить точки E и O , точку пересечения с ребром AD обозначить как Q ;

9) сравнить с Рис. 21.

$GFEQP$ – искомое сечение.

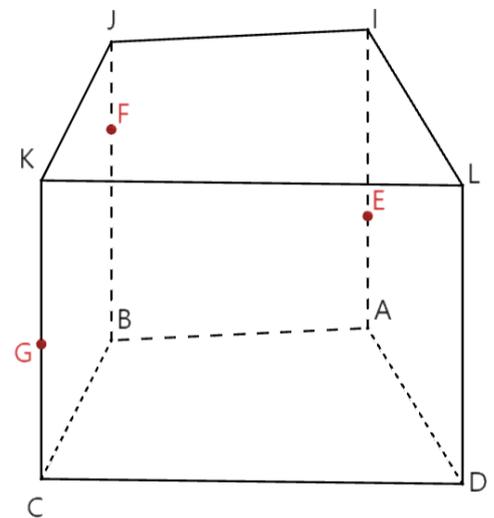


Рис. 20

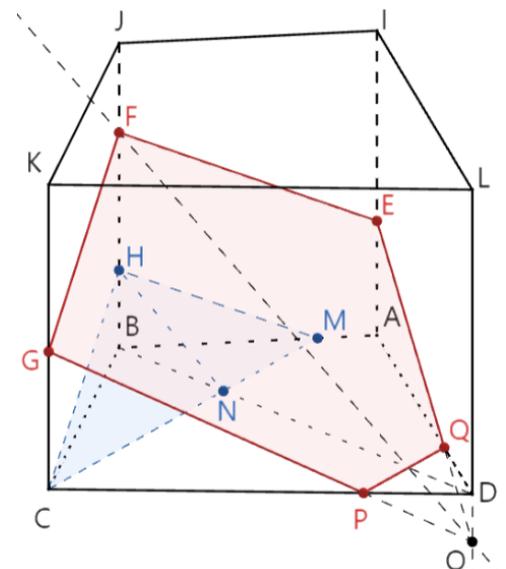


Рис. 21

- 7) через точку ___ провести прямую, параллельную отрезку _____;
- 8) продлить ребро _____ до пересечения с построенной прямой, точку пересечения обозначить как ___;
- 9) соединить точки ___ и ___, ___ и ___, обозначить точки пересечения с рёбрами _____ и _____ как ___ и ___, соответственно.
- _____ – искомое сечение.

3. Постройте сечение пирамиды $SABCD$ методом переноса секущей плоскости, если: а) сечение проходит через данную точку G и отрезок $EF \in SAD$ (Рис. 23); б) сечение проходит через данные точки (Рис. 24).

Запишите алгоритм построения.
Обоснуйте каждый шаг алгоритма.

III. Применение алгоритма

Необходимые знания и умения:

- знание этапов выполнения алгоритма построения сечений методом переноса секущей плоскости;

- умение преобразовывать алгоритм в правило;

- умение составлять общий алгоритм на основе частного;
- умение применять алгоритм построения сечений методом переноса секущей плоскости при решении задач;
- умение находить ошибки, допущенные при построении сечений методом переноса секущей плоскости.

Задания:

1. На основе алгоритма построения сечений методом переноса секущей плоскости сформулируйте правило.

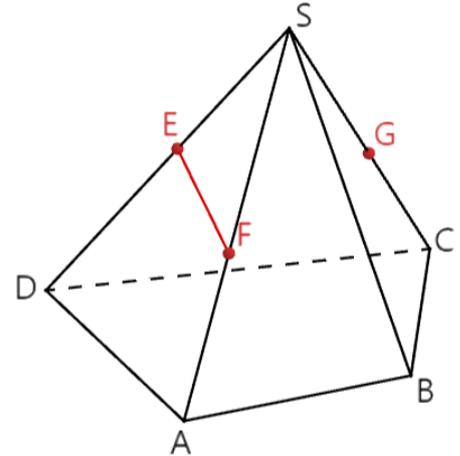


Рис. 23

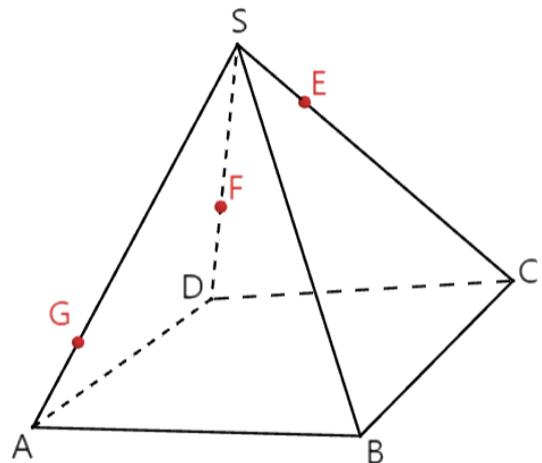


Рис. 24

2. На основе алгоритма построения сечений методом переноса секущей плоскости для призмы составьте общий алгоритм, подходящий для любого многогранника.

3. Найдите ошибки при построении сечений методом переноса секущей плоскости (Рис. 25), поясните свой ответ и постройте сечения правильно.

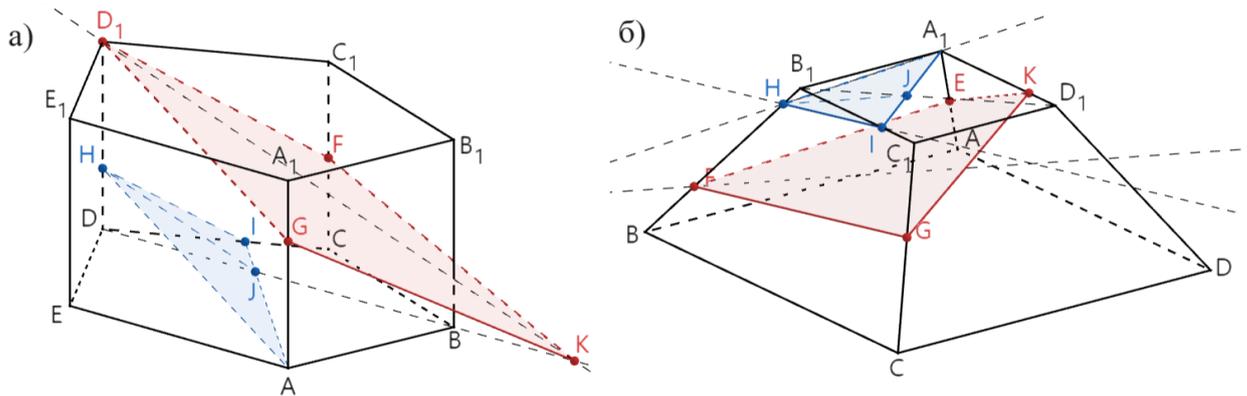


Рис. 25

4. Упростите алгоритм построения сечения по трём данным точкам E, F, G (Рис. 26):

1) достроить многогранник до куба с вершинами $S \in D_1M$ и $R \in C_1N$;

2) соединить точки E и F , F и G ;

3) из вершины D_1 построить прямую, параллельную отрезку EF , точку пересечения с ребром CC_1 обозначить как H ;

4) из точки H построить прямую, параллельную отрезку FG , точку пересечения с NR обозначить как I ;

5) соединить точки I и D_1 , C_1 и S , точку пересечения обозначить как J ;

6) соединить точки H и J ;

7) из точки F построить прямую, параллельную отрезку HJ , точку пересечения с прямой A_1S обозначить как K ;

8) соединить точки K и E , точку пересечения с ребром A_1M обозначить как L .

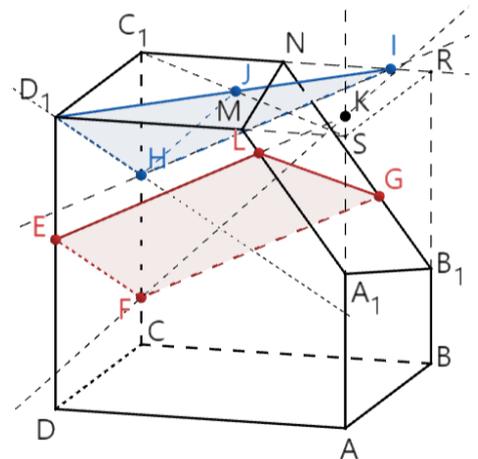


Рис. 26

$EFGL$ – искомое сечение.

5. На рёбрах SA и SC пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P и Q . Построить сечения пирамиды плоскостями, параллельными прямым BP и AQ и проходящими через точки K , L и M , взятым соответственно на следующих рёбрах: а) SA ; б) SB ; в) BC .

Таким образом, был составлен комплект заданий, состоящий из трёх блоков по 10 заданий в каждом: 2 задания на введение алгоритма, 3 задания на усвоение алгоритма и 5 заданий на применение алгоритма.

Выводы по Главе 2

Были рассмотрены три метода построения сечений: метод следов, метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей плоскости. Были приведены алгоритмы построения сечений при использовании каждого из этих методов, а также описаны общие черты методов и их отличительные особенности, указаны возможные ошибки при построении сечений. Задачи на построение сечений могут быть одним из средств формирования алгоритмического мышления учащихся старших классов. Следовательно, необходимо выделить требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на построение сечений каждым из трёх методов, в соответствии с возрастными особенностями учеников 10-11-х классов

Были выделены этапы работы по овладению алгоритмом, уровни развития алгоритмического мышления и критерии его сформированности, а также проведено соотнесение между ними и приведены примерные формулировки заданий, направленных на овладение алгоритмом. Было сформулировано семь требований к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления, и в соответствии с ними можно составить комплект заданий.

В соответствии с выделенными требованиями был составлен комплект

заданий, состоящий из 30 заданий, разделённых на 3 блока – введение алгоритма, усвоение алгоритма и применение алгоритма. Каждый из блоков содержит 2 задания на введение алгоритма, 3 задания на усвоение алгоритма и 5 заданий на применение алгоритма.

Заключение

В ходе анализа литературных источников было выявлено, что у понятия алгоритмического мышления нет однозначной трактовки, и каждый автор даёт своё определение. Формирование алгоритмического мышления – одна из важнейших составляющих обучения математике, однако этот вид мышления необходим не только при решении математических задач, но и в повседневной жизни. Выбор эффективного способа действий, действие по заданному алгоритму, поиск информации, необходимой для решения какой-либо задачи, – всем этим полезным в обычной жизни умениям способствует сформированное алгоритмическое мышление.

Также были выделены возрастные особенности учеников старших классов. Именно в старшем школьном возрасте у учащихся совершенствуется умение анализировать и синтезировать информацию, а также развивается умение обобщать. Они всё больше обращаются к теоретическим материалам, а не практическим, могут мыслить абстрактно. У них совершенствуется память путём увеличения её объёма и применения приёмов произвольного запоминания, проявляется самостоятельность мышления, суждений. У старшеклассников появляются новые интересы, внутренняя мотивация к деятельности.

В ходе исследования были рассмотрены уровни развития алгоритмического мышления, выделенные различными авторами, критерии сформированности алгоритмического мышления и этапы работы по овладению алгоритмом, а также проведено соотнесение между ними. Помимо этого, были приведены примерные формулировки заданий, направленных на овладение алгоритмом.

Задачи на построение сечений – одно из средств формирования алгоритмического мышления. Были рассмотрены три метода построения сечений: метод следов – единственный метод, который изучается на базовом уровне, – метод внутреннего проектирования и метод переноса секущей

плоскости, изучаемые на углублённом уровне. Были приведены алгоритмы построения сечений при использовании данных методов, описаны общие черты методов и их отличительные особенности, указаны возможные ошибки при построении сечений. Задачи на построение сечений могут быть одним из средств формирования алгоритмического мышления учащихся старших классов.

В соответствии с этим сформулированы требования к заданиям, направленным на формирование алгоритмического мышления.

Результатом работы стал комплект заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления, по теме «Построение сечений». Комплект состоит из 30 заданий и может применяться как для формирования различных умений, необходимых для формирования алгоритмического мышления, так и для диагностики сформированности этих умений.

Поскольку многие выпускники не справляются с заданием № 14 ЕГЭ по математике профильного уровня, которое предполагает построение сечений, составленный комплект заданий может помочь в отработке алгоритмов построения сечений при подготовке к ЕГЭ.

Сопоставление результатов работы с поставленными задачами позволяет заключить следующее:

1. Был проведён анализ психолого-педагогической и методической литературы по теме исследования с целью определения понятия алгоритмического мышления, его структурных компонентов и критериев сформированности.

2. Были выделены особенности формирования алгоритмического мышления у учеников старших классов при обучении математике.

3. Была обоснована значимость задач на построение сечений в формировании алгоритмического мышления.

4. Были сформулированы требования к отбору заданий, направленных на формирование алгоритмического мышления при решении задач на

построение сечений.

5. Был разработан комплект заданий по теме «Построение сечений», направленных на формирование алгоритмического мышления.

Таким образом, следует считать, что задачи исследования полностью выполнены, цель достигнута.

Литература

1. Абибуллаева А. О. Характеристика процесса развития алгоритмического мышления младших школьников на уроках математики // Проблемы современного педагогического образования. 2017. № 54-2. С. 10-15.
2. Аввакумова И. А., Сивкова М. А. К вопросу о формировании алгоритмического мышления учащихся в процессе обучения математике // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2023. № 8. С. 278-282.
3. Алтухова С. О. Образовательные требования и условия формирования алгоритмического мышления // Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам : Материалы Всероссийской научно-практической конференции, Екатеринбург, 25–26 октября 2021 года. Екатеринбург : [б.и.], 2021. С. 194-200.
4. Вьюнова Н. И. Педагогические условия формирования здоровьесберегающей компетенции у старшеклассников в общеобразовательной школе / Н. И. Вьюнова, И. А. Пешкова // Известия Воронежского государственного педагогического университета. 2021. № 3. С. 21-25. Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/journal/issue/326912> (дата обращения: 24.05.2024).
5. Гаврилова И. В. Трит-методика решения алгоритмических задач на уроках информатики в основной школе : дис. ... канд. пед. наук 13.00.02. Красноярск, 2019. 163 с.
6. Губина Т. Н. Методические приемы развития алгоритмического мышления будущего учителя информатики // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 3-1. С. 6-16.
7. Далингер В. А. Геометрия: стереометрические задачи на построение : учеб. пособие для СПО. 2-е изд. М. : Издательство Юрайт, 2019. 189 с.

8. Еремеева Н. Н. Формирование алгоритмического мышления у школьников в ходе групповой работы // Пермский педагогический журнал. 2013. № 4. С. 86-89.
9. Иванова А. И. Алгоритмическое мышление // Образовательный портал «Справочник». Дата последнего обновления статьи: 28.09.2022. URL: https://spravochnick.ru/psihologiya/myshlenie_i_ego_priroda/algoritmicheskoe_myshlenie/ (дата обращения: 20.11.2023).
10. Копаев О. В. Алгоритм, как модель алгоритмического процесса. К. : НПУ им. М. П. Драгоманова, 2003. 290 с.
11. Кручинин В. А. Психология развития и возрастная психология: учебн. пос. для вузов / Нижегород. гос. архитектур.- строит. ун-т. Н. Новгород: ННГАСУ, 2016. 219 с.
12. Лебедева Т. Н. Формирование алгоритмического мышления школьников в процессе обучения рекурсивным алгоритмам в профильных классах средней общеобразовательной школы : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02. Екатеринбург, 2005. 219 с.
13. Лучко Л. Г. Формирование алгоритмической культуры учащихся в процессе обучения базовому курсу информатики / Омский гос. пед. ун-т. Омск, 1999. 38 с.
14. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. М. : Просвещение, 1988. 223 с.
15. Малова И. Е. Теория и методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / И. Е. Малова, С. К. Горохова, Н. А. Малинникова, Г. А. Яцковская. М. : ВЛАДОС, 2009. 448 с.
16. Немов Р. С. Психология. Учеб. для студентов высш. пед. учеб. заведений. В 3 кн. Кн. 2. Психология образования. 2-е изд. М. : Просвещение: ВЛАДОС, 1995. 496 с.
17. Парченкова В. В. Алгоритмическое мышление и способы его развития //

- Молодежь и XXI век 2018 : Материалы VIII Международной молодежной научной конференции. В 5-ти томах, Курск, 21–22 февраля 2018 года / Ответственный редактор А. А. Горохов. Том 2. Курск: Закрытое акционерное общество «Университетская книга», 2018. С. 191-192.
18. Полат Е. С. Новые педагогические технологии и информационные технологии в системе образования : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров. 3-е изд., испр. и доп. М. : Академия, 2008. 272 с.
 19. Приказ Министерства просвещения РФ от 23 ноября 2022 г. № 1014 «Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования».
 20. Прокофьев А. А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (стереометрия). – М : МИЭТ, 2004. 240 с.
 21. Развитие личности в условиях современных вызовов : монография / ответственные редакторы Г. Г. Тюстина, С. В. Коваленко. — Нижневартонск : НВГУ, 2022. 167 с. Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/366908> (дата обращения: 23.05.2024).
 22. Саранцев Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование». Казань : Центр инновационных технологий, 2011. 228 с.
 23. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. М. : Просвещение, 2002. 224 с.
 24. Слинкина И. Н. Использование компьютерной техники в процессе развития алгоритмического мышления у младших школьников : диссертация ... кандидата педагогических наук : 13.00.02. Екатеринбург, 2000. 192 с.
 25. Стась А. Н., Долганова Н. Ф. Развитие алгоритмического мышления в

- процессе обучения будущих учителей информатики // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2012. № 7(122). С. 241-244.
26. Тестов В. А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование, наука и производство. 2016. № 1 (130). С. 4-20.
27. Унегова Т. А. Построение сечений многогранников плоскостями. Лабораторные работы. Методическая разработка / Урал. гос. пед. ун-т : Сост. Т. А. Унегова. Екатеринбург, 2000. 20 с.
28. Филатова Л. Ю., Филатова А. С. Развитие алгоритмического стиля мышления при обучении студентов вуза // Наука ЮУрГУ : материалы 67-й научной конференции. Секции естественных наук. 2015. С. 469-472.
29. Царева С. Е. Формирование основ алгоритмического мышления в процессе начального обучения математике // Начальная школа. 2012. № 4. С. 5-13.
30. Чебурина О. В. Формирование алгоритмического мышления в обучении программированию игр // Наука и перспективы. 2017. №2. URL: <https://s.esrae.ru/nip/pdf/2017/2/116.pdf> (дата обращения: 20.11.2023)
31. Шаповаленко И. В. Возрастная психология (Психология развития и возрастная психология). М. : Гардарики, 2005. 349 с.
32. Шардаков М. Н. Мышление школьника. М : Учпедгиз, 1963. 256 с.
33. Шарипов Ф. Ф., Мараджабов С. И. Теоретическая модель формирования алгоритмического мышления студентов вузов в процессе обучения объектно-ориентированному программированию // БГЖ. 2017. №3 (20). С. 313-316.
34. Шуванов, И. Б. Психология развития и возрастная психология : учебное пособие / И. Б. Шуванов, С. С. Новикова, Я. В. Церекидзе. Сочи : СГУ, 2022. 88 с. Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. URL: <https://e.lanbook.com/book/351749> (дата обращения: 23.05.2024).
35. Яценко И. В., Высоцкий И. Р., Семенов А. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по математике. М : ФИПИ, 2023. 43 с.