

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, информатики и информационных технологий
Кафедра теории и методики обучения математике

**Формирование познавательных
универсальных учебных действий
обучающихся в процессе решения практико-
ориентированных задач по математике**

Выпускная квалификационная работа

Направление «Педагогическое образование»
Профиль «Математика»

Квалификационная работа
допущена к защите
Зав. кафедрой, профессор, доктор
пед. наук,
И.Г. Липатникова

_____ дата

_____ подпись

Руководитель ОПОП:
доцент, канд. пед. наук
И.Н. Семёнова

_____ подпись

Исполнитель:
Студентка 4 курса
Группы БМ-41
Фаткина Н.А.

Научный руководитель:
Доцент, канд. пед. наук
Блинова Т.Л.

Екатеринбург

2017 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ.....	5
1.1. Общая характеристика познавательных универсальных учебных действий.....	5
1.2. Требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся.....	12
1.3. Практико-ориентированные задачи как средство формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся.....	23
ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ.....	38
2.1. Логико-математический анализ темы «Задачи на построение».....	38
2.2. Требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение.....	46
2.3. Совокупность практико-ориентированных задач на построение, способствующих формированию познавательных универсальных учебных действий обучающихся.....	54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	67
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	68

ВВЕДЕНИЕ

Современное образование направлено на воспитание гармонично развитой личности, способной к самообразованию и умеющей применять полученные знания на практике. Для решения данной задачи, Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования предусмотрены требования не только к предметным и личностным результатам образования, но и к метапредметным, включающим универсальные учебные действия (УУД), теоретическими основами в разработке которых занимались А.Г.Асмолов, Г.В.Бурменская, И.А. Володарская, А.М.Кондаков, О.В.Запятая и другие.

Одним из компонентов УУД являются познавательные УУД, которые предполагают формирование умения осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения задач, создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач, устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения и делать выводы. Достижение этих требований возможно реализовать в процессе грамотной организации процесса обучения на основе использования практико-ориентированных задач, которые обуславливают связь математики с жизнью и другими предметными областями, а также способствуют формированию умений объяснять явления, процессы, связи и отношения реальной жизни, выявляемые в ходе решения задачи, что способствует формированию умения действовать в социально-значимой ситуации.

Необходимость включения в содержательную компоненту математики практико-ориентированных задач обусловлена также требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. Согласно ему, обучающиеся и выпускники должны уметь применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера, иметь представление о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления. Проблемой включения практико-ориентированных задач в процесс обучения занимались многие методисты и математики: М.В.Егупова, Л.М.Фридман, И.М.Шапиро,

Л.В.Шелехова и другие. Несмотря на то, что вопрос достаточно исследован, согласно Концепции развития математического образования в РФ от 24 декабря 2013 года, одной из главных проблем развития математического образования остаётся проблема содержательного характера, а именно, оторванность математического образования от жизни.

Таким образом, вышесказанное обуславливает актуальность выбранной темы работы «Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в процессе решения практико-ориентированных задач по математике».

Объект работы: процесс обучения математике в 7-9 классах.

Предмет работы: формирование познавательных УУД обучающихся в процессе решения практико-ориентированных задач по математике.

Цель: разработка совокупности практико-ориентированных задач, способствующих формированию познавательных УУД обучающихся.

Задачи работы:

1. Проанализировать методическую и психолого-педагогическую литературу с целью раскрытия сущности понятия «познавательные универсальные учебные действия»
2. Изучить требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных УУД обучающихся на уроках математики.
3. Выявить особенности практико-ориентированных задач и их роли в формировании познавательных УУД обучающихся.
4. Провести логико-математический анализ темы «Задачи на построение».
5. Выделить требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных УУД обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение.
6. Разработать совокупность задач по теме «Задачи на построение», направленных на формирование познавательных УУД обучающихся.

ГЛАВА 1. ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1.1. Общая характеристика познавательных универсальных учебных действий

В современном мире объем информации постоянно растет, наука интенсивно развивается, а знания, полученные в школе, устаревают и требуют регулярного обновления, поэтому задачей современной системы образования является подготовка обучающихся к самостоятельному поиску, усвоению и применению новых знаний, а также быстрому переобучению в ответ на требования общества. Заканчивая обучение, выпускники должны уметь ставить перед собой жизненные цели и уметь их добиваться, решая для этого различные задачи.

Для достижения целей, поставленных перед современной системой образования, Федеральный государственный образовательный стандарт [25] устанавливает требования освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования, которые делятся на три уровня: личностный, предметный и метапредметный.

Под метапредметными результатами понимаются освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия, а также способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике. Кроме того, метапредметные результаты предполагают самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и построение индивидуальной образовательной траектории.

По мнению А.Г. Асмолова [13], в широком значении термин «универсальные учебные действия» означает умение учиться, т. е. способность субъекта к саморазвитию и самосовершенствованию путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта.

В более узком (собственно психологическом) значении этот термин можно определить как совокупность способов действия учащегося (а также

связанных с ними навыков учебной работы), обеспечивающих самостоятельное усвоение новых знаний, формирование умений, включая организацию этого процесса.

В пособии для учителя А.Г. Асмолова и др. «Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий» [26], в статье Горленко Н.М., Запятой О.В. «Структура универсальных учебных действий и условия их формирования» [10], в «Фундаментальном ядре содержания общего образования», выпущенном под редакцией В.В. Козлова [29], универсальные учебные действия сгруппированы в четыре блока:

- Личностные.
- Регулятивные.
- Коммуникативные.
- Познавательные.

Среди УУД, определенных Стандартом, познавательные действия являются основополагающими, поскольку это один из ведущих видов деятельности человека, сознательно направленный на приобретение информации об объектах и явлениях реальной действительности, а также конкретных знаний [30].

Предмет «Математика» направлен, прежде всего, на развитие познавательных УУД. Это обусловлено тем, что на уроках математики ведется работа с научными понятиями и доказательствами, перед учащимися можно ставить проблемные ситуации, подводить их к самостоятельному открытию новых знаний, рассматривать различные способы решения задач и выбирать из них наиболее рациональный, составлять схемы, структурируя тем самым информацию, проводить аналогии, перерабатывать информацию, переводя текстовые задачи на язык математики, а также осуществлять исследовательскую и проектную деятельность. В связи со всем вышеперечисленным, остановимся на познавательных учебных действиях подробнее.

В Федеральном государственном образовательном стандарте [25], глоссарии [9], Фундаментальном ядре содержания общего образования [29] не приведены определения познавательных УУД, поэтому рассмотрим определения, сформулированные авторами, занимающимися вопросом определения и формирования УУД.

В своей работе А.Г.Асмолов [26] соотносит познавательные универсальные учебные действия с исследовательскими. В данную группу входят сложные формы опосредствования познавательной деятельности, переработка и структурирование информации (работа с текстом, смысловое чтение), формирование элементов комбинаторного мышления как одного из компонентов гипотетико-дедуктивного интеллекта, а также работа с научными понятиями и освоение общего приёма доказательства как компонента воспитания логического мышления.

Н.А.Чуланова и Т.Н.Черняева [30] под познавательными УУД понимают умственные действия, направленные на планирование, осуществление, анализ своей познавательной деятельности и управление ею на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенных обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов. Универсальный характер познавательных действий проявляется в том, что они обеспечивают интеллектуальное развитие ребенка, который учится учиться, чтобы применять полученные знания на практике.

Л.И.Боженкова [1] рассматривает понятие «познавательные действия» как действия, обеспечивающие познание. Под познанием она понимает умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку.

О.В.Степанова [24] формулирует следующее определение: познавательные универсальные учебные действия— это особая избирательная направленность личности на процесс познания; ее избирательный характер выражен в той или иной предметной области знаний. Эта направленность ха-

рактируется постоянным стремлением к познанию, к новым, более полным и глубоким знаниям.

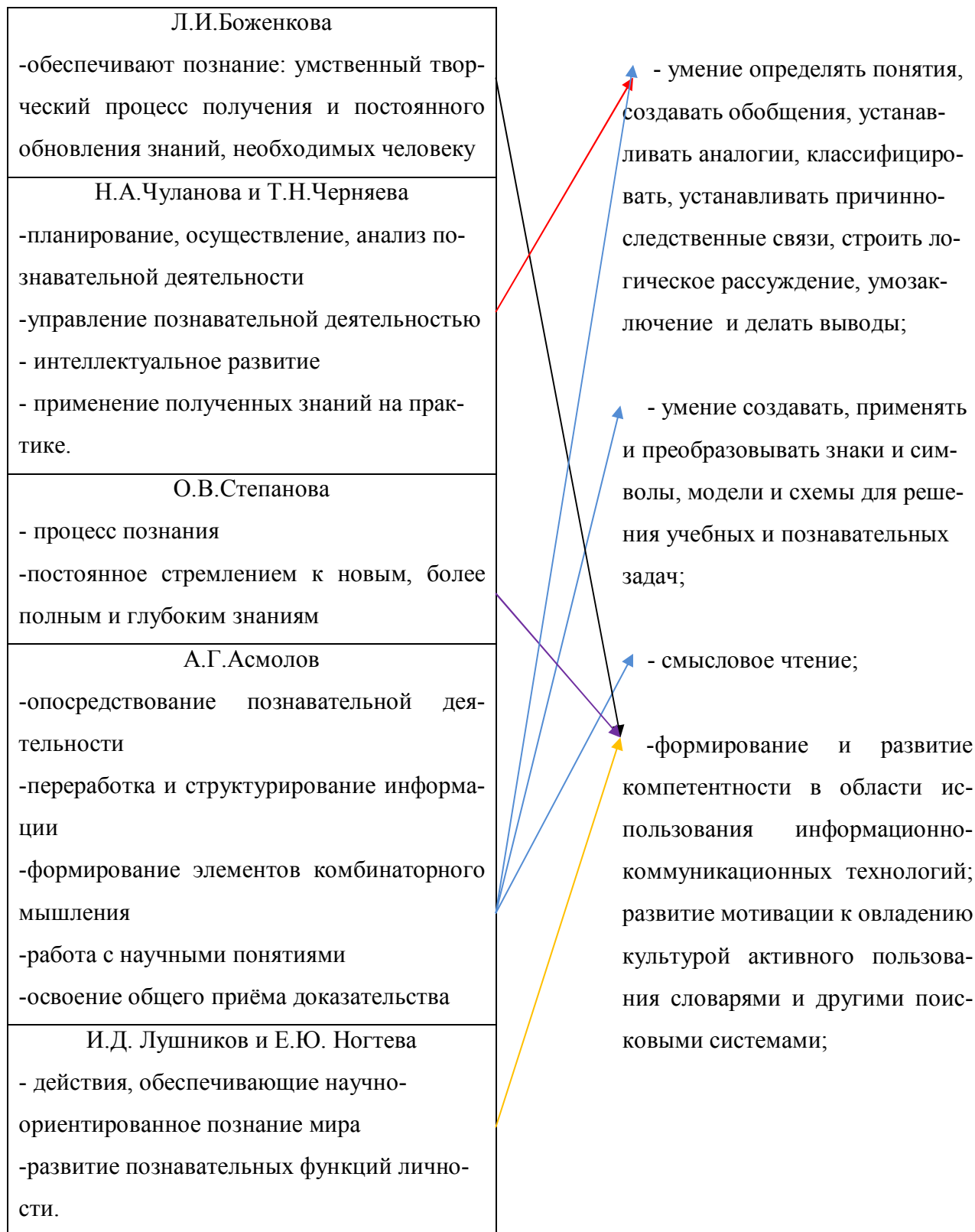
И.Д. Лушников и Е.Ю. Ногтева [14] определяют познавательные УУД как действия, обеспечивающих научно-ориентированное познание мира и развитие познавательных функций личности.

Рассмотрим различные подходы к определению понятия «познавательные универсальные учебные действия» с точки зрения реализации требований, заложенных в Федеральном государственном образовательном стандарте применительно к данному понятию (схема 1).

Схема 1

Различные подходы к определению понятия познавательных УУД:

Требования ФГОС ООО к познавательным УУД обучающихся:



Исходя из результатов, представленных на схеме, за ведущее возьмём определение, данное А.Г.Асмоловым, так как оно наиболее полно удовлетворяет требованиям стандарта, предъявляемым к познавательным УУД.

Предполагается, что результатом формирования познавательных универсальных учебных действий будут являться следующие умения:

- основы реализации проектно-исследовательской деятельности;
- проведение наблюдения и эксперимента под руководством учителя;
- осуществление расширенного поиска информации с использованием ресурсов библиотек и Интернета;
- создание и преобразование модели и схемы для решения задач;
- осуществление выбора наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;
- умение давать определение понятиям;
- умение устанавливать причинно-следственные связи;
- осуществление логической операции установления родовидовых отношений, ограничение понятия;
- умение обобщать понятия — осуществлять логическую операцию перехода от видовых признаков к родовому понятию, от понятия с меньшим объёмом к понятию с большим объёмом;
- осуществление сравнения, сериации и классификации, самостоятельно выбирая основания и критерии для указанных логических операций;
- умение строить классификацию на основе дихотомического деления (на основе отрицания);
- умение строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;
- умение объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе исследования;

- выполнение ознакомительного, изучающего, усваивающего и поискового чтения;
- структурирование текстов, включая умение выделять главное и второстепенное, главную идею текста, выстраивать последовательность описываемых событий [21].

В настоящее время в процессе обучения приоритет отдается формированию универсальных учебных действий, в частности познавательных, которые определяют успешность обучения. Овладение обучающимися УУД может осуществляться на различных предметах, однако анализируя предполагаемые результаты формирования познавательных УУД, можно предположить, что акцент смещён в сторону математики, а рассматриваемые умения могут быть сформированы в процессе решения математических задач.

1.2. Требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся

Формировать познавательные универсальные учебные действия необходимо за счёт регулярной и планомерной работы, для этого каждого обучающегося следует вовлекать в специально организованные ситуации на уроке. Согласно определению А.Г.Асмолова, выбранного в качестве ведущего в данной работе, формирование познавательных УУД может быть реализовано в результате организации исследовательских работ школьников. В данном случае подразумевается не создание масштабных исследовательских работ по математике, требующих больших временных затрат и самостоятельной работы вне учебного времени, а имеются в виду исследования, которые проводятся на каждом уроке [17].

Достижение исследовательских и интеллектуальных умений, а следовательно и познавательных универсальных учебных действий может быть обеспечено системой условий, выделенных А.Г.Асмоловым [26]. Раскроем средства достижения этих условий:

1.Создание условий для возникновения вопросов и проблем у учащихся (стимулирование творческого звена мыслительного процесса). Данное условие может быть реализовано в процессе проблемно-диалогового обучения.

2.Рефлексия мыслительного процесса, достижение высокого уровня понимания решения. Рефлексия позволяет оценивать мысли с точки зрения истинности и логической правильности, улучшать результаты решения задач, поэтому требуется организовать работу по обоснованию и объяснению обучающимися каждого шага решения.

3.Обеспечение эмоционального благополучия детей. Данное условие достигается за счёт уважительных взаимоотношений с обучающимися, отсутствия у последних страха допустить ошибку, вниманием к его чувствам и потребностям.

4. Удовлетворение познавательной потребности, которая складывается при сознании обучающимися необходимости приобретения новых знаний, необходимых для жизни и деятельности.

5. Удовлетворение потребности в межличностном общении. Достижение данного условия достигается путем вовлечения обучающихся в диалог как с учителем, так и с одноклассниками. В ходе диалога школьники могут высказывать своё мнение, выдвигать гипотезы, предлагать пути решения задач.

6. Развитие способности к самоуправлению своей деятельностью — рефлексивной саморегуляции. Рефлексия является основой саморегуляции, она проявляется через действия целеполагания, анализа, планирования, контроля, оценки, постановку целей

7. Дифференциация и индивидуализация содержания обучения, которые предполагают использование заданий различного уровня сложности, и учёт индивидуальных особенностей обучающегося.

8. Дифференциация и индивидуализация помощи учителя учащимся. Степень оказания помощи обучающимся со стороны учителя должна зависеть от индивидуальных особенностей обучающихся.

В сфере развития познавательных универсальных учебных действий приоритетное внимание уделяется:

- практическому освоению обучающимися основ проектно-исследовательской деятельности;
- развитию стратегий смыслового чтения и работе с информацией;
- практическому освоению методов познания, используемых в различных областях знания и сферах культуры, соответствующего им инструментария и понятийного аппарата, регулярному обращению в учебном процессе к использованию общеучебных умений, знаково-символических средств, широкого спектра логических действий и операций [21].

В основном, средства формирования познавательных УУД направлены на формирование исследовательских действий или их отдельных составляю-

щих, поэтому целесообразно рассмотреть особенности исследовательской деятельности.

Исследовательская и проектная деятельность.

Учебно-исследовательская и проектная деятельность имеет общие черты, поэтому представляется возможным рассматривать их в качестве средства формирования познавательных УУД совместно.

Общие характеристики:

- практически значимые цели и задачи;
- структура, общие компоненты;
- компетентность в выбранной сфере исследования, творческую активность, собранность, аккуратность, целеустремлённость, высокую мотивацию [26].

Помимо общих черт, у проектной и учебно-исследовательской деятельности существует ряд различий (табл.1).

Таблица 1

Различия проектной и учебно-исследовательской деятельности

Проектная деятельность	Учебно-исследовательская деятельность
Проект направлен на получение вполне конкретного запланированного результата — продукта, обладающего определёнными свойствами, и который необходим для конкретного использования	В ходе исследования, как правило, организуется поиск в какой-то области, формулируются отдельные характеристики итогов работ. Отрицательный результат тоже результат
Реализацию проектных работ предваряет представление о будущем продукте, планирование процесса создания продукта и реализация этого плана. Результат проекта должен быть точно соотнесён со всеми характеристиками, сформулированными в его замысле	Логика построения исследовательской деятельности включает формулировку проблемы исследования, выдвижение гипотезы (для решения этой проблемы) и последующую экспериментальную или модельную проверку выдвинутых предположений

В результате освоения исследовательской деятельности, у обучающихся должны быть сформированы умения, составляющие этапы исследовательской деятельности.

1. Постановка проблемы, создание проблемной ситуации:
 - умение видеть проблему;
 - умение давать определение понятиям;
 - умение ставить вопросы;
 - умение структурировать тексты.
2. Выдвижение гипотезы:
 - умение выдвигать гипотезы
3. Планирование исследовательских (проектных) работ и выбор необходимого инструментария:
 - умение проводить предварительный анализ информации,
 - умение осуществлять поиск решения проблем,
 - умение выстраивать стратегии поиска.
4. Поиск решения проблемы:
 - умение наблюдать;
 - умение и навыки проведения экспериментов;
 - умение делать выводы и умозаключения;
 - умение классифицировать.
5. Представление (изложение) результатов исследования или продукта проектных работ:
 - умение структурировать материал;
6. Обсуждение и оценка полученных результатов и применение их к новым ситуациям:
 - умение обсуждать, объяснять, доказывать, защищать результаты[26].

Как отмечалось выше, познавательные УУД соотносятся с исследовательскими, формирование которых возможно с помощью средств и условий, направленных на формирование отдельных составляющих исследовательских действий. Рассмотрим некоторые из них.

1. Работа с математическим текстом

Учебные математические тексты включают определения понятий, свойства, теоремы и математические задачи. Как правило, обучающимся необходимо преобразовать и интерпретировать математические тексты с помощью познавательных УУД [2]. Преобразование и интерпретация данных текстов предполагает:

- систематизировать, сопоставлять, анализировать, обобщать и интерпретировать информацию, содержащуюся в готовых информационных объектах;

- выделять главную и избыточную информацию, выполнять смысловое свёртывание выделенных фактов, мыслей; представлять информацию в сжатой словесной форме (в виде плана или тезисов) и в наглядно- символической форме (в виде таблиц, графических схем и диаграмм, карт понятий — концептуальных диаграмм, опорных конспектов);

- заполнять и дополнять таблицы, схемы, диаграммы, тексты.

Использование информационно-коммуникационных технологий.

Одним из компонентов познавательных УУД является осуществление расширенного поиска информации, в том числе в Интернете. Поэтому требуется проводить работу по формированию у учащихся умения осуществлять поиск информации и анализировать результаты поиска.

Обучающиеся смогут использовать найденную информацию для установления причинно-следственных связей и зависимостей, объяснений и доказательств фактов в различных учебных и практических ситуациях, ситуациях моделирования и проектирования[21].

2. Постановка проблемы, проблемный диалог

Проблемно-диалогическое обучение - это тип обучения, обеспечивающий творческое усвоение знаний учащимися посредством диалога с учителем [15].

Постановка проблемы. Школьникам предлагается задание по новой теме, которое должно вызвать затруднение. После осознания обучающимися невозможности выполнения задания, учитель включает класс в побуждаю-

щий диалог. В процессе этого диалога учитель выясняет, на каком именно этапе решения возникла проблема, в чем сходство и в чем различие с предыдущими заданиями. Побуждающий диалог заканчивается констатацией наличия проблемы или формулировкой темы урока.

Поиск решения обычно осуществляется на материале того же задания, которое вызвало затруднение. В форме фронтальной работы учитель побуждает детей выдвигать гипотезы, после чего в форме диалога проверяется правильность каждой предложенной гипотезы. После доказательства одной из гипотез формулируется вывод, как правило, новое знание.

Рассмотрим пример реализации проблемно-диалогового обучения как одного из средств формирования составляющих исследовательских действий на примере урока алгебры по теме «График функции $y=|x|$ » (по материалам статьи Е.Л. Мельниковой «Предметная специфика проблемного диалога» [15]) и проиллюстрируем, какие компоненты познавательных УУД будут формироваться в процессе данной работы (табл. 2).

Таблица 2

Анализ	Учитель	Ученики	Компоненты познавательных УУД	
П О С Т А Н О В К А П Р О Б Л Е М Ы	<p>Практическое задание</p> <p>побуждение к осознанию</p> <p>проверка задания</p> <p>побуждение к осознанию</p> <p>Побуждение к проблеме</p> <p>тема на доску</p>	<p>- Постройте график $y= x$.</p> <p>- Смогли вы выполнить это задание?</p> <p>-Покажите ваши графики.</p> <p>- Итак, функция одна, а графиков получилось?</p> <p>- Почему так получилось? Чего мы не знаем?</p> <p>- Значит, тема урока...</p> <p>- Верно (фиксирует тему на доске)</p>	<p>На листочках выполняют задание</p> <p>Да, смогли (<i>проблемная ситуация с затруднением не возникла</i>) <i>фиксирует на доске следующие варианты:</i> (возникновение проблемной ситуации со столкновением мнений)</p> <p>- Много (<i>осознание противоречия</i>)</p> <p>- Мы не знаем какой график у функции $y= x$.</p> <p>- График функции $y= x$</p>	<p>проведение наблюдения и эксперимента под руководством учителя;</p> <p>осуществление сравнения</p> <p>формулирование проблемы</p>

П О И С К Р Е Ш Е Н И Я	побуждение к проверке первой гипотезы	-Итак, вы предложили 4 гипотезы о графике функции $y= x $. Обсудим первую гипотезу. Вы с этой гипотезой согласны?	- Нет. Этот график не является искомым, т.к. здесь функция принимает отрицательные значения, а модуль отрицательным быть не может. <i>(контраргумент)</i>	умение строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;
	побуждение к проверке второй гипотезы	- Обсудим вторую гипотезу. С таким графиком вы согласны?	- Этот график также не является искомым, т.к. здесь x принимает только неотрицательные значения, а в действительности он принимает все значения и отрицательные в том числе. <i>(контраргумент)</i>	выдвижение гипотез и их обоснование
	побуждение к проверке	- Обсудим третью гипотезу.	- Это вообще не график функции <i>(контраргумент)</i>	
	побуждение к проверке решающей гипотезы	- Проверим четвертую гипотезу.	- Это график искомой функции, т.к. x принимает любые значения, а y – только неотрицательные, причем противоположным значениям x соответствуют одинаковые значения y . <i>(аргумент)</i>	
		- А как доказать, что график $y= x $ действительно график функции? - Итак, $y= x $ - кусочно-линейная функция. -Каким ещё образом можно построить график этой функции	- Надо снять модуль и записать $ x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$	доказательство;
	вывод	- Сделайте вывод, что является графиком функции $y= x $.	- Отображением графика относительно оси OX в верхнюю плоскость. -Графиком функции $y= x $ является ломаная линия с вершиной в начале координат, звенья которой – биссектрисы I и II координатных углов <i>(открытие нового знания)</i>	умение объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе исследования

Данное задание позволяет формировать умения формулировать проблему, выдвигать гипотезы и обосновывать или опровергать их, умение осуществлять сравнение.

3. Учебное доказательство.

Одним из компонентов познавательных УУД является умение строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей, которое может формироваться в процессе учебного доказательства. Под доказательством понимают процедуру, с помощью которой устанавливается истинность какого-либо суждения. В процессе доказательства требуется с помощью последовательности рассуждений и рассуждений из достоверных фактов вывести новое утверждение. В этом и реализуется заявленное умение.

В целях обеспечения освоения обучающимися деятельности доказательства в работе учителей, наряду с обучением школьников конкретному доказательству тех или иных теорем, особое внимание должно уделяться вооружению обучающихся обобщённым умением доказывать[21].

Из вышесказанного следует, что доказательства могут выступать в процессе обучения как средства, способствующие формированию отдельных компонентов познавательных УУД.

4.Рефлексия

Задачей рефлексии является осознание внешнего и внутреннего опыта субъекта и его отражение в той или иной форме.

При решении задач рефлексия нужна для осознания обучающимися совершаемых действий и выделения их оснований.

Для развития рефлексии требуется подбирать задания, отвечающие следующим условиям:

- постановка всякой новой задачи как задачи с недостающими данными;
- анализ наличия способов и средств выполнения задачи;
- оценка своей готовности к решению проблемы;
- самостоятельный поиск недостающей информации;

- самостоятельное изобретение недостающего способа [21].

Таким образом, развитие рефлексии способствует формированию следующих компонентов познавательных УУД: умение объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе решения задачи, осуществление выбора наиболее эффективных способов решения задач, а также осуществление расширенного поиска информации.

5. Практико-ориентированные задания

Для развития познавательного интереса к изучению математики и понимания значимости математических знаний можно использовать задачи, связывающие математику с реальной жизнью.

Большую роль в формировании понятий, которые являются одним из компонентов познавательных УУД, играют учебные тексты «задания, содержащие практическую ситуацию». Задания с практическим содержанием могут мотивировать изучение нового понятия, показывая, что прошлых математических знаний недостаточно для описания возникшей практической проблемы, показать применение нового понятия в различных областях знаний, установить связь математических понятий с понятиями других областей.

Пример практико-ориентированного задания:

На рисунке изображены два макета одного и того же здания (рис.1). На одном из них указаны его размеры в натуральную величину, а на другом уменьшенные. Требуется ответить на вопросы и составить краткую запись рассматриваемой ситуации, после чего сравнить с уже готовой.

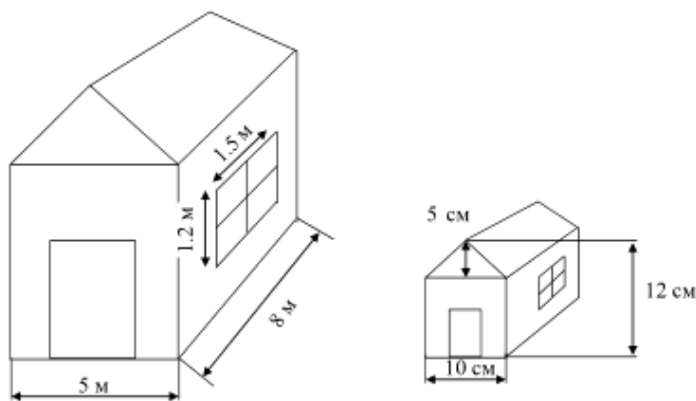


Рис.1

Ответьте на вопросы:

- Какова высота дома на макете а?
- Какова длина дома на макете б?
- Каковы размеры окна дома на макете б?
- Каковы размеры мансарды дома на макете а?
- Какие отношения можно составить, используя данные рисунки?
- Какие связи между этими отношениями определены условием задачи?

Составь краткую запись, характеризующую эту ситуацию. Сравни свою краткую запись с расположенной ниже (табл.3), заполнив в ней пропуски [18].

Таблица 3

Параметр	На макете а	На макете б
Высота дома		
Размеры окна		
Размеры мансарды		

В ходе выполнения данного задания, обучающиеся должны проанализировать ситуацию, сравнить эти два объекта, выделить существенные признаки понятия «пропорция».

Практико-ориентированные задачи

Все представленные выше средства и условия формирования познавательных УУД могут быть реализованы в процессе решения практико-ориентированных задач, так как задача является математическим текстом, в котором для решения требуется выделить главную и второстепенную информацию, сопоставить и интерпретировать её, представить в виде схемы, а при необходимости, осуществить поиск недостающей информации в компьютерных и некомпьютерных источниках. Также, практико-ориентированная задача может выступать в качестве основания для постановки проблемы, показывая, что имеющихся знаний недостаточно для решения проблемы, а в процессе поиска плана решения может быть реализован проблемный диалог. Одним из этапов решения задач является проверка, которая предполагает до-

казательство правильности представленного решения, тогда обучающиеся осознают совершаемые действия и их основания, следовательно реализуется и рефлексия.

Пример практико-ориентированной задачи:

Для покраски стен требовалось 14 банок краски объемом 0,7 л, но на складе банок такого объема не оказалось. Заказчику предложили взять банки объемом на 0,25 л меньше. Сколько банок с краской требуется для покраски стен?

В процессе решения данной задачи обучающиеся устанавливают связь математических понятий с понятиями других областей, отделяют главную информацию от второстепенной, составляют математическую модель задачи, выделяют признаки понятия «пропорция», необходимые для решения данной задачи, осуществляют решение задачи, выбирая наиболее рациональный способ, интерпретируют полученный результат.

Для формирования познавательных УУД требуется грамотная организация учебного процесса, удовлетворяющая определенным условиям, а также использование в учебном процессе средств, направленных на формирование отдельных составляющих исследовательских действий. В формировании познавательных УУД важная роль отдается практической направленности изучения математики, так как обучающиеся видят связь с жизнью, что способствует формированию умения действовать в социально-значимой ситуации: строить логические рассуждения, устанавливать причинно-следственные связи, объяснять явления, процессы, связи и отношения. Также в процессе работы над задачей используются многие средства, направленные на формирование познавательных УУД. Таким образом, одним из средств формирования познавательных УУД в процессе обучения математике можно использовать практико-ориентированные задачи.

1.3. Практико-ориентированные задачи как средство формирования познавательных универсальных учебных действий

Задача является одной из основных дидактических единиц в процессе изучения школьного курса математики. Она также выступает целью и средством обучения, поэтому решение задач по математике способствует формированию у обучающихся не только системы знаний, но и развитию мышления. На уроках математики задачи решаются на протяжении всех лет обучения, а умение решать задачи показывает насколько глубоко и основательно освоен учебный материал.

Существуют различные подходы к классификации задач. Л.М.Фридман в качестве одного из оснований классификации выделял характер объектов предметной области [27]. На этом основании все школьные задачи делятся на два больших класса: чисто математические задачи и прикладные - текстовые сюжетные задачи.

Особую группу сюжетных задач составляют задачи, в которых речь идёт о реальных объектах. Задачи, входящие в эту группу, называются практико-ориентированными.

Рассмотрим подробнее понятие «Практико-ориентированная задача».

Сергеева Л.А. рассматривает практико-ориентированную задачу как вид сюжетных задач, смоделированных в виде жизненной ситуации, требующих в своем решении реализации всех этапов метода математического моделирования [23].

Мишенина О.В., Ощепкова Е.А.[16] под практико-ориентированной задачей понимают задачу, обусловленную практической необходимостью.

Практико-ориентированные задачи - особый вид сюжетных задач, которые показывают применение математической теории в практических ситуациях[33].

Чуракова Р.Г. [31] при определении понятия «практико-ориентированная задача» говорит о направленности этих задач на решение практических потребностей человека и связи с формированием практиче-

ских навыков, необходимых в повседневной жизни и профессиональной сфере.

С целью выделения общего и уточнения определения понятия «Практико-ориентированная задача» проведем контент-анализ представленных определений (табл. 4).

Таблица 4

Контент-анализ определений понятия «практико-ориентированная задача»

	Вид сюжетных задач	Жизненная, практическая ситуация	Реализация всех этапов метода математического моделирования/ применение математической теории	обусловленная практической необходимостью
Л.А.Сергеева	+	+	+	
О.В.Мишенина ,Е.А.Ощепкова				+
Е.Н.Эрентраут	+	+	+	
Р.Г.Чуракова				+

Таким образом, на основании проведенного контент-анализа, под практико-ориентированными задачами будем понимать вид сюжетных задач, смоделированных в виде жизненной ситуации и обусловленными практической необходимостью, требующих в своем решении реализации всех этапов метода математического моделирования.

Для выяснения влияния практико-ориентированных задач на формиро-

вание познавательных УУД целесообразно рассмотреть с какой целью и на каком этапе изучения темы используются данные задачи.

И.М. Шапиро [32] выделяет следующие дидактические цели использования задач с практическим содержанием на уроках математики:

1. Мотивировка введения новых математических знаний.

Достижение данной цели возможно при использовании практических задач в преддверии изучения новой темы для создания проблемной ситуации. На данном этапе задачи должны быть подобраны так, чтобы обучающиеся видели необходимость приобретения новых знаний по математике, которые позволили бы решить поставленную прикладную задачу.

Например, при введении понятия линейного уравнения с двумя переменными, можно применить следующую задачу:

«Требуется покрасить пол в комнате, площадь которой 24 м^2 . В магазине продаются банки красок двух объёмов: маленькой банки хватает на покраску 2 м^2 , большой банки хватает на покраску 5 м^2 . Сколько банок краски того и другого объёма понадобится для покраски пола?»

Решение: обозначив через x число банок краски меньшего объёма и через y число банок красок большего объёма, обучающиеся приходят к уравнению: $2x+5y=24$. Однако возможность решить такое уравнение возникает лишь после объяснения учителем нового материала.

Введению понятия системы неравенств с одним неизвестным может предшествовать задача:

«Вместимость бассейна 4000 литров. В этот бассейн начали вливать воду. Сколько литров воды в час нужно наливать в бассейн, чтобы через 4 часа было заполнено более половины бассейна и чтобы через 5 часов бассейн не переполнился.»

Решение: обозначив за x количество воды, которая вливается в бассейн за 1 час, обучающиеся приходят к следующим неравенствам: $4x > 4000$ и $5x \leq 4000$. После того, как обучающиеся приходят к данным неравенствам и к выводу, что эти неравенства должны рассматриваться совместно, учитель

вводит понятие системы неравенств с одним неизвестным.

В ходе решения представленных задач, обучающиеся убеждаются в практической необходимости новых знаний, что повышает интерес к изучению нового материала.

2. Иллюстрация учебного материала.

Достижение данной цели возможно при использовании задач и примеров из окружающей действительности, которые раскрывают перед обучающимися практическую значимость математики.

Например, понятие линейной функции можно продемонстрировать на примерах из жизни и из смежных дисциплин. Зависимость калорийности молока от его жирности можно представить следующей формулой: $k = p \cdot 113,6 + 330$, где k - калорийность молока, а p - процент жира в молоке. К представленной формуле могут предлагаться следующие задания:

- исходя из личного опыта, укажите реальную область определения функции, заданной формулой;
- постройте график этой зависимости;
- сделайте вывод о зависимости между калорийностью молока и его процентом жирности.

При изучении темы «Осевая и центральная симметрия» можно предложить обучающимся выделить в реальных объектах ось и центр симметрии» (рис.2)

Немаловажное значение имеет привлечение школьников к самостоятельному отысканию примеров применения математических знаний в известных им жизненных явлениях и к использованию этих примеров в своих ответах.

Симметрия



Рис.2

Работа с подобными задачами способствует развитию пространственных представлений школьников, расширению их кругозора и является эффективным средством связи обучения с жизнью.

3. Закрепление и углубление знаний.

Достижение данной цели возможно при использовании задач с практическим содержанием, решение которых ориентировано на применение изучаемого материала по математике, фабула раскрывает применение математики в реальной действительности, а методы и результаты решения могут найти результаты на практике.

Например, при изучении темы «Сложение и вычитание одночленов» может быть использована следующая задача:

Вкладчик положил в банк некоторую сумму денег из расчета 10% годовых. Через год он снял со своего вклада 600 рублей, в результате чего на его счете осталась сумма равная половине первоначального вклада. Сколько денег будет на счете у вкладчика в конце второго года хранения?

Решение задачи сводится к составлению уравнения. Обозначив первоначальную сумму вклада за x рублей, обучающиеся приходят к следующей математической модели: $1,1x - 600 = 0,5x$.

Решая подобные задачи, обучающиеся видят значимость получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию учащегося.

Для реализации всех представленных целей, практико-ориентированных задачи должны отвечать следующим требованиям:

I. Требования к фабуле задачи:

- отражение реального объекта, его свойств;
- связь математики с другими науками, практическими областями деятельности;
- наличие проблемы или свойств объекта, для изучения которых действительно необходимо применить математику;
- соответствие возрастным особенностям (познавательным интересам, ведущему типу деятельности школьника);
- доступность фабулы для понимания учащимся: используемые нематематические термины известны школьникам в результате изучения других дисциплин, легко определяемы или интуитивно ясны.

II. Требования к математическому содержанию задачи:

- математическая содержательность решения задачи;
- соответствие численных данных задачи, существующим на практике;
- соответствие фактических данных, сделанных допущений и упрощений реальному процессу, объекту, ситуации, описанных в задаче;
- возможность включения задач на приложения в систему тренировочных заданий, упражнений и задач курса математики в школе [23].

Практико-ориентированным задачи позволяют школьникам видеть, что математика находит применение в любой области деятельности, и это, в свою очередь, повышает интерес к предмету.

Решение практико-ориентированных задач - сложная деятельность, поэтому следует дать учащимся знания об особенностях данных задач и их решении, выработать у них умения и навыки, необходимые для самостоятельного решения данных задач.

Практико-ориентированные задачи являются нестандартными задачами, так как в курсе математики не существует общих правил, определяющих программу решения данных задач в виде последовательности шагов.

Процесс решения любой нестандартной задачи состоит в последовательном применении двух основных операций:

- 1) сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче;
- 2) разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач.

В зависимости от характера нестандартной задачи мы используем либо одну из этих операций, либо обе [28].

Прикладная направленность предусматривает овладение школьниками математическими методами познания действительности, одним из которых является метод математического моделирования. Математическое моделирование является ведущим методом изучения окружающей действительности и играет фундаментальную роль в многочисленных приложениях математики.

Моделирование – это процесс замещения одного объекта (или системы объектов) другим с целью получения информации о свойствах объекта - оригинала с помощью объекта-модели.

Математическое моделирование - это приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики [3].

Метод математического моделирования применяется к научному исследованию действительности, то есть к решению реальных задач, по следующей схеме:

- 1 этап - этап формализации;
- 2 этап - решение математической задачи, сформулированной на первом этапе;
- 3 этап- этап интерпретации [32].

Егупова М.В. рассматривает еще один этап математического моделирования - нулевой, на котором проводится анализ условия, тогда по четырем этапам метода математического моделирования обучающиеся должны уметь:

0 этап. Математизация (анализ условия).

0.1. Выделять объекты окружающей действительности, которые могут быть описаны средствами школьного курса математики.

0.2. Заменять исходные объекты и отношения их математическими эквивалентами. Описывать эти объекты и отношения на языке математики.

1 этап. Формализация (построение математической модели условия).

1.1. Устанавливать соответствие между содержательной и математической моделью объекта в зависимости от предъявленных условий.

1.2. Соотносить реальные объекты различной природы с одной математической моделью.

1.3. Описывать реальный объект несколькими математическими моделями.

1.4. Оценивать полноту исходных данных для построения математической модели.

2 этап. Внутримodelьное решение.

2.1. Выбирать рациональные методы исследования реальных объектов в зависимости от поставленной задачи.

2.2. Составлять математическую модель с учетом требуемой точности описания реальных объектов задачи.

3 этап. Интерпретация результата.

3.1. Анализировать использованные математические методы решения с точки зрения их рациональности для исследования реального объекта.

3.2. Интерпретировать результат исследования математической модели с требуемой погрешностью [11].

Сюжетная задача является более общим понятием, чем практико-ориентированная, поэтому к практико-ориентированным задачам можно применить этапы решения сюжетной задачи.

Весь процесс решения задачи можно разделить на восемь этапов:

1-й этап – анализ задачи;

2-й этап – построение модели задачи;

3-й этап – поиск способа решения задачи;

4-й этап – осуществление решения задачи;

5-й этап – проверка решения задачи;

6-й этап – исследование задачи;

7-й этап – формулирование ответа задачи;

8-й этап – познавательный анализ задачи и её решения [28].

На основе этапов метода математического моделирования, выделенных М.В.Егуповой, представим более подробно схему решения практико-ориентированной задачи, отражающую организацию деятельности обучающихся на каждом из этапов (схема 2). Этапы решения сюжетной задачи будем рассматривать в качестве наполнения этапов, выделенных в методе математического моделирования.

Схема 2



1-й этап – анализ задачи.

На данном этапе необходимо разобраться о чем идет речь в задаче, в чем состоит требование. Учитель должен обеспечить правильное прочтение текста задачи и разделение её на смысловые части. Для наиболее полного понимания условия задачи целесообразно провести семантический, логический и математический анализы.

Семантический анализ направлен на понимание и усвоение содержания текста задачи и предполагает выделение и осмысление:

- отдельных слов, терминов, понятий, житейских, так и математических;
- грамматических конструкций («если... то», «после того, как...»..);
- количественных характеристик объекта, задаваемых словами «каждого», «какого-нибудь» и т. д.;
- восстановление предметной ситуации, описанной в задаче, путем переформулирования;
- упрощенного пересказа текста с выделением только существенной для решения задачи информации;
- выделение обобщенного смысла задачи — о чем говорится в задаче, указание на объект и величину, которая должна быть найдена (стоимость, объем, площадь, количество и т. д.).

Логический анализ предполагает:

- умение заменять термины их определениями;
- умение выводить следствия из имеющихся в условии задачи данных.

Математический анализ включает анализ условия и требования задачи.

Анализ условия направлен на выделение:

- 1) объектов (предметов, процессов):
 - рассмотрение объектов с точки зрения целого и частей;
 - рассмотрение количества объектов и их частей;
- 2) величин, характеризующих каждый объект;

3) характеристик величин:

- однородные, разнородные,
- числовые значения (данные),
- известные и неизвестные данные,
- изменения данных: изменяются ,не изменяются,
- отношения между известными данными величин [13].

2-й этап – построение модели задачи.

На данном этапе задача рассматривается уже с помощью средств математики. Для того, чтобы задача стала предметом исследования, необходимо отделить ее от всего несущественного и представить в таком виде, который обеспечивал возможность изучения задачи математическими методами. В первую очередь, реальные, жизненные объекты заменяются математическими моделями. Для того, чтобы легче выделить математический смысл, текст задачи записывается кратко с использованием условной символики, и анализируются отношения между данными и искомыми.

На этом этапе возможен перевод текста задачи на графический язык, т.е. использование чертежа, схемы, графика, таблицы, рисунка, формулы, уравнений и др. Эти вспомогательные модели должны отражать все объекты задачи, отношения между ними, а также указывать требования задачи.

3-й этап – поиск способа решения задачи.

На данном этапе, для поиска плана решения, обучающиеся могут задавать себе вопросы [20]. Встречалась ли вам эта задача раньше (возможно в другой форме)? Известна ли вам задача, родственная этой? Знаете ли вы теоремы, которые могут оказаться полезными? Встречалась ли вам задача с подобным неизвестным? Если вам встречалась задача, родственная данной, можно ли использовать её результат, метод решения?

Преобразование данных и требований задачи также может способствовать нахождению плана решения. Для выполнения преобразований учащиеся могут сформулировать и ответить на вопросы: можно ли ввести какой-либо вспомогательный элемент, чтобы было можно воспользоваться прежней за-

дачей? Нельзя ли формулировать задачу иначе? Нельзя ли придумать сходную задачу\ более общую\частную \аналогичную? Можно ли решить только часть задачи? Сохраните только часть условия: насколько определенным окажется тогда неизвестное? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Можно ли изменить искомые и данные так, чтобы новые данные и искомые были ближе друг к другу?

4-й этап – осуществление решения задачи.

На данном этапе обучающиеся выполняют действия и осуществляют запись решения задачи. Запись решения задачи может осуществляться в виде последовательных конкретных действий.

5-й этап – проверка решения задачи.

На данном этапе обучающемуся необходимо проверить правильность решения задачи, убедиться, что оно удовлетворяет всем условиям задачи.

6-й этап – исследование задачи.

На данном этапе устанавливается при каких условиях задача имеет решение и сколько различных решений она имеет, а также выясняется при каких условиях задача вообще не имеет решения.

7-й этап – формулирование ответа задачи.

На 7 этапе требуется дать чёткий ответ на вопрос задачи, интерпретируя результат, полученный на 6 этапе.

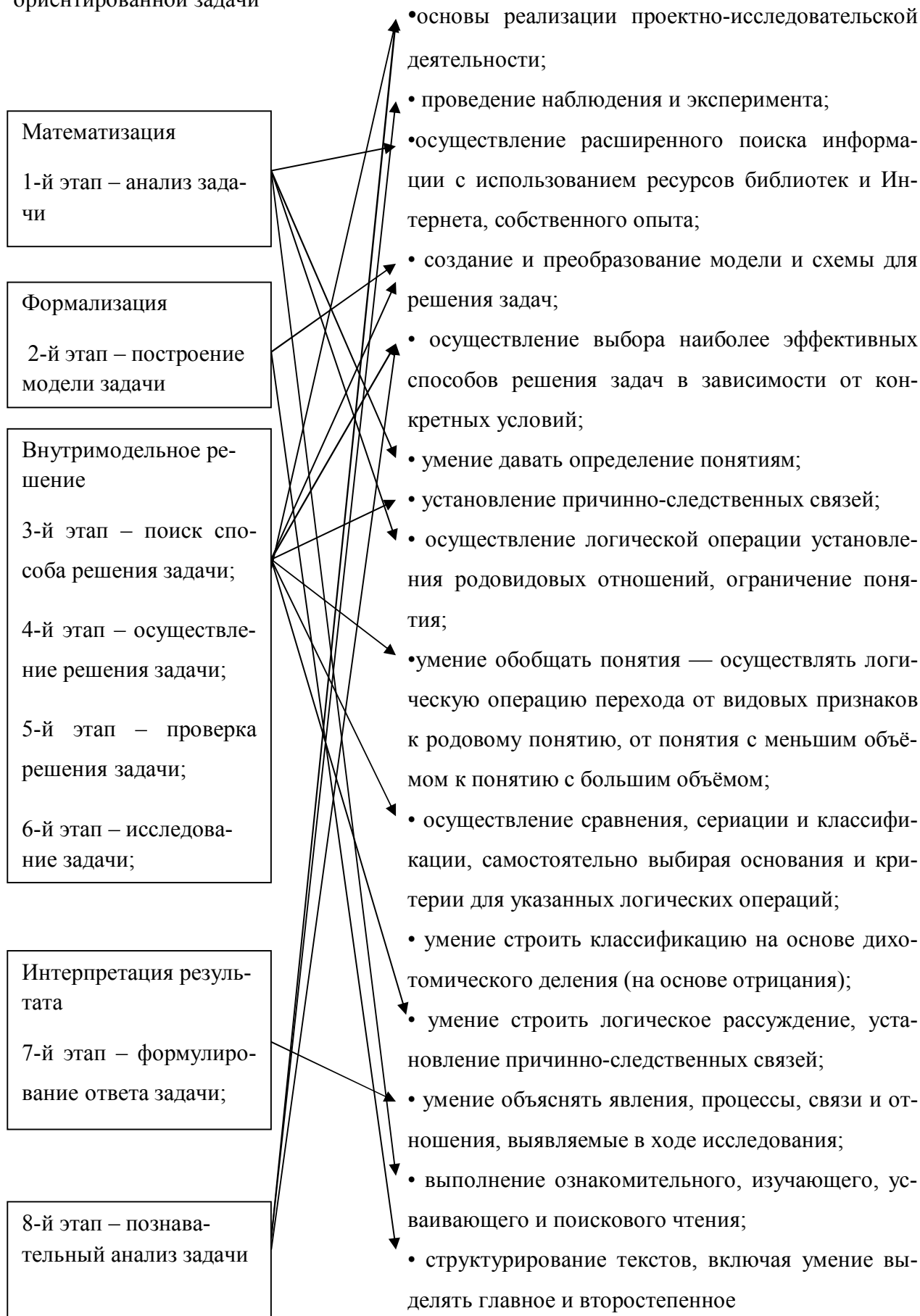
8-й этап – познавательный анализ задачи и её решения.

На данном этапе устанавливается, нет ли другого, более рационального решения, можно ли обобщить задачу, какие выводы можно сделать из решения этой задачи. Однако стоит отметить что данный этап не всегда возможно реализовать и другого решения задачи быть не может.

Соотнесём организацию деятельности обучающихся на этапах решения практико-ориентированной задачи с компонентами познавательных УУД с целью выявления значимости использования задач практико-ориентированного характера для формирования познавательных УУД (схема 3)

Этапы решения практико-ориентированной задачи

Компоненты познавательных УУД



Представленная схема наглядно демонстрирует, что в процессе решения практико-ориентированных задач формируются практически все компоненты познавательных универсальных учебных действий.

Математические понятия, умения и навыки находят применение в различных жизненных ситуациях, а также в технологических и производственных процессах, поэтому в обучении необходимо найти и установить связь математических понятий с практикой, с жизнью. Для этого в процесс обучения необходимо включать практико-ориентированные задачи. Цель решения таких задач заключается не столько в получении ответа — числа, сколько в присвоении нового, межпредметного или общепредметного знания, а выделенные особенности решения практико-ориентированных задач позволяют эффективно формировать познавательные универсальные учебные действия.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

В 1 главе были рассмотрены следующие вопросы:

1. Сущности понятия «познавательные универсальные учебные действия» и их структура.
2. Требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных УУД обучающихся на уроках математики.
3. Особенности практико-ориентированных задач и их роль в формировании познавательных УУД обучающихся.

Среди УУД, определенных Стандартом, познавательные действия являются основополагающими. Для формирования познавательных УУД требуется грамотная организация учебного процесса, удовлетворяющая определенным условиям, а также использование в учебном процессе средств, направленных на формирование отдельных составляющих исследовательских действий. Соблюдение условия и использование средства формирования познавательных УУД в полной мере позволяет учебный предмет «Математика».

В формировании познавательных УУД важная роль отдаётся практической направленности изучения математики, в частности практико-ориентированным задачам, так как обучающиеся видят, что математические понятия, умения и навыки находят применение в различных жизненных ситуациях, а также в технологических и производственных процессах. Цель решения практико-ориентированных задач заключается не столько в получении ответа — числа, сколько в присвоении нового, межпредметного или общепредметного знания, а выделенные особенности решения практико-ориентированных задач позволяют эффективно формировать познавательные универсальные учебные действия.

ГЛАВА 2. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1 Логико-математический анализ темы «Задачи на построение»

Особое место с точки зрения включения в образовательный процесс практико-ориентированных задач занимает школьный курс геометрии, а именно один из его разделов - планиметрия. Это связано с тем, что планиметрия сама по себе является практико-ориентированной наукой.

В качестве частного случая практико-ориентированных задач могут быть рассмотрены задачи на построение. Задачи на построение являются неотъемлемой частью школьного курса геометрии. Впервые обучающиеся сталкиваются с данными задачами в 7 классе, однако более сложные задачи на построение встречаются и в 8 и в 9 классе.

Проведём логико-математический анализ темы «Задачи на построение», основываясь на учебнике «Геометрия 7-9 классы» Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф. и др. [5] с целью выявления наиболее продуктивных приемов, методов, средств обучения, направленных на формирование познавательных УУД.

7 класс

Глава: «Треугольники»

Параграф: «Задачи на построение»

Темы: «Окружность», «Построения циркулем и линейкой», «Примеры задач на построение»

Материал данного параграфа «Задачи на построение» изложен на дедуктивной основе, так как даны определения понятий «Окружность», «Центр окружности», «Радиус окружности», «Хорда», «Диаметр» и «Круг», которые рассматриваются на конкретных примерах. Объясняется, какие операции можно выполнять с помощью циркуля и линейки, а затем, с помощью рассмотренных операций решаются задачи на построение.

В учебнике приведены решения простейших задач на построение: построение отрезка, равного данному, построение угла, равного данному, построение биссектрисы угла, построение перпендикулярных прямых и построение середины отрезка.

Согласно рабочей программе и примерному тематическому планированию [8], обучающиеся по данной теме должны

Формулировать:

- определение окружности;

Объяснять:

- что такое центр окружности;
- что такое радиус окружности;
- что такое хорда;
- что такое диаметр окружности;

Уметь:

- решать простейшие задачи на построение:
 - строить угол, равный данному;
 - строить биссектрису угла;
 - строить перпендикулярные прямые;
 - строить середину отрезка;
- решать более сложные задачи, использующие указанные простейшие;
- сопоставлять полученный результат с условием задачи;
- анализировать возможные случаи.

Глава: «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

Параграф: «Построение треугольника по трём элементам»

Темы: «Расстояние от точки до прямой. Расстоянию между параллельными прямыми», «Построения треугольника по трём элементам»

В теме «Построение треугольника по трём элементам» рассматриваются решения задач на построении треугольника по двум сторонам и углу меж-

ду ними и по трём сторонам, которые впервые включает элементы доказательства и исследования. Задача о построении треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам приводится без решения и обучающимся предлагается решить ее самостоятельно. Данная глава содержит целый блок задач на построение для самостоятельного решения.

После изучения представленного выше материала, с целью обобщения и систематизации знаний обучающихся вводится общая схема, по которой решаются задачи с помощью циркуля и линейки. Данная схема состоит из 4 частей: анализ, построение, доказательство и исследование. Каждая из частей описывается и проиллюстрирована примером:

Под анализом задачи на построение понимается отыскание способа решения задачи путем установления связи между искомыми элементами и данными задачи. Также отмечается, анализ даёт возможность составить план решения задачи на построение.

При проведении анализа используется не только аналитический метод, но и синтетический, так как на вспомогательном чертеже иногда бывает целесообразно ввести вспомогательные фигуры, а также данные суммы или разности отрезков или углов.

Выполнение построения по намеченному плану предполагает последовательное описание действий с помощью элементарных построений и выполнение этих построений с помощью циркуля и линейки.

Доказательство представляет собой сопоставление полученного результата с условием задачи. Доказательство зависит от способа построения, поэтому доказательства могут быть различны. При осуществлении доказательства требуется пользоваться известными теоремами, аксиомами и свойствами фигур.

Исследование задачи предполагает выяснение вопроса о наличии решения при любых данных и о количестве различных решений. На этапе исследования рассматривается отдельно каждый шаг построения и выясняется, всегда ли этот шаг осуществим и однозначен ли он.

Также в учебнике отмечается, что в некоторых случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части опускаются.

Результатом обучения данной теме являются следующие умения:

- решать задачи на построение, связанные с соотношением между сторонами и углами треугольника и расстоянием между параллельными прямыми, проводя, при необходимости дополнительные построения;
- сопоставлять полученный результат с условием задачи;
- исследовать возможные случаи [8].

8 класс

Глава «Четырехугольники»

Программа 8 класса не предусматривает включение новых теоретических знаний по теме «Задачи на построение», однако в пятой главе «Четырехугольники» после изучения отдельных видов четырехугольников вводятся задачи на их построение, перед которыми на примере повторяется схема решения задач на построение.

Глава: «Подобные треугольники»

Тема: «Практические приложения подобия треугольников»

Ещё один блок задач на построение вводится в седьмой главе «Подобные треугольники». Данный блок включён в пункт «Практические приложения подобия треугольников», в котором с решением рассматривается задача на построение треугольника по двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла. Решение данной задачи основано на подобии треугольников, поэтому на этапе познавательного анализа задачи и её решения может быть рассмотрено свойство биссектрисы треугольника, согласно которому биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. В задачах, относящихся к этому пункту, требуется построить треугольник по данному отношению сторон или разделить отрезок в данном отношении. Например:

«Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC , если известно, что $AB:BC=2:1$ »

Глава: «Окружность»

В восьмой главе «Окружность» в каждом пункте содержатся задачи на построение, в которых требуется провести касательную к окружности, основываясь на соответствующей теореме, провести серединный перпендикуляр к отрезку, описать вокруг треугольника окружность и вписать окружность в треугольник.

Восьмой класс заканчивается задачами повышенной сложности и задачами на повторение, среди которых также есть задачи на построение.

По окончании 8 класса, обучающиеся по теме «задачи на построение» должны:

- решать задачи на построение, связанные с параллелограммом, трапецией, равнобедренной и прямоугольной трапецией, прямоугольником, ромбом и квадратом;
- объяснять что такое метод подобия в задачах на построение, и приводить примеры применения этого метода;
- решать задачи на построение, связанные с окружностью, вписанными треугольниками и четырёхугольниками [8].

9 класс

Глава: Длина окружности и площадь круга

Тема: «Построение правильных многоугольников»

В данной теме с решением рассмотрена задача, в которой требуется построить правильный шестиугольник с помощью циркуля и линейки, а также правильный $2n$ -угольник из правильного n -угольника. После рассмотрения решения данных задач отмечается, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки, однако не все правильные многоугольники допускают такое построение, например семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки. Далее обучающимся предлагается решить задачи, где требуется описать вокруг правильных многоугольников окружность.

Глава: «Движения»

В главе «Движения», после изучения соответствующей теории обучающимся предлагаются задачи на построение, которые решаются с помощью симметрии, параллельного переноса и поворота. Например:

«Даны две прямые b и c и точка A , не лежащая ни на одной из них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c . Сколько решений имеет задача?»

«Ядерным» материалом темы задачи на построение являются простейшие задачи на построение:

- построение отрезка, равного данному;
- построение угла, равного данному;
- построение биссектрисы угла;
- построение перпендикулярных прямых;
- построение середины отрезка;
- построение треугольников по трём сторонам;
- построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам;
- построение треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- построение отрезка в данном отношении;
- построение касательной к окружности, проходящей через точку

вне окружности.

Выбор учебника «Геометрия 7-9 классы» Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф. и др. для анализа темы «Задачи на построение» обусловлен тем, что в данном учебнике представлена полная схема решения задач на построение, включающая 4 этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Учебник «Геометрия 7-9 классы» А.В.Погорелова [6] схема решения задач на построение не представлена, в учебнике «Геометрия 7 класс» А.Д.Александрова, А.Л.Вернера [7] в схеме решения задач на построение нет чёткого выделения этапа анализа.

Из анализа учебника «Геометрия 7-9 классы» Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф. и др.[5] видно, что задачи на построение с практической направленностью в учебнике не представлены, однако можно подобрать или составить

практико-ориентированные задачи, для которых представленные в учебнике задачи будут являться математическими моделями. При подборе или составлении практико-ориентированных задач следует учитывать требования к данным задачам, отмеченные в пункте 1.3., а также проверить, возможно ли решить задачу на построение, основываясь на аксиоматике Л.С. Атанасяна.

Пример 1:

«Пруд, находящийся неподалеку от деревни, имеет округлую форму. Дорожникам надо построить прямую дорогу к пруду от деревни так, чтобы дорога прилегала к пруду» [4].

Решение данной задачи сводится к построению касательной к окружности, тогда соответствующая данной задачи задача из учебника:

Задача № 637, 8 класс

«К данной окружности построить касательную, проходящую через данную точку вне окружности» [5].

Пример 2:

«В каком месте незастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все три угла двора были освещены одинаково?» [22]

Соответствующая данной задачи задача из учебника:

Задача № 711, 8 класс:

«Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Для каждого из них постройте описанную окружность.»[5]

Решение данной математической задачи сводится к нахождению центра описанной окружности - точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника. Для первой задачи искомая точка будет являться местом, в который нужно поместить фонарь.

Всего в ученике Атанасяна Л.С. и др. «Геометрия 7-9» в 7 классе 362 задачи, из которых на построение 90, в 8 классе 448 задач, из которых 64 задачи на построение, в 9 классе 321 задача, из них 36 на построение. Таким образом, задачи на построение составляют примерно от 15 % всех задач, представленных в учебнике. Такое большое количество обусловлено тем, что

при решении задач на построение легко прослеживаются внутрипредметные связи, т.к. решение таких задач зачастую требует знания из различных разделов школьного курса геометрии. Посредством задач на построение более глубоко осознаются теоретические сведения о геометрических фигурах. Это позволяет использовать задачи на повторение для повторения, обобщения и систематизации изученного материала.

2.2. Требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение

Ранее в работе отмечалось, что одним из средств формирования познавательных УУД в процессе обучения математике являются практико-ориентированные задачи. Практико-ориентированные задачи на построение как частный случай практико-ориентированных задач не только сохраняют особенности, направленные на формирование познавательных УУД, но и приносят новые возможности.

Под практико-ориентированными задачами на построение будем понимать вид сюжетных задач, смоделированных в виде жизненной ситуации и обусловленными практической необходимостью, требующих в своем решении реализации всех этапов метода математического моделирования, на этапе внутримодельного решения которого реализуется решение задачи на построение.

Для того, чтобы в процессе обучения математики, в частности в процессе работы над практико-ориентированными задачами на построение наиболее успешно формировались познавательные УУД, необходимо, чтобы выполнялись следующие требования:

Первое требование к методике решения задач на построение:

Процесс решения задачи на построение необходимо осуществлять в 4 этапа, следовательно, весь процесс решения практико-ориентированной задачи на построение можно представить в виде последовательности этапов метода математического моделирования с включением на этапе внутримодельного решения всех четырёх этапов решения практико-ориентированных задач.

Второе требование к выбору метода решения задач на построение

Как показал логико-математический анализ темы «задачи на построение» в качестве основного метода обучения при решении задач на построение

ние должен быть выбран исследовательский метод обучения, так как задачи на построение позволяют развивать умение анализировать условия заданной ситуации, выдвигать предположения по решению задачи и составлять его план, после чего анализировать полученное решение. Исходя из этого, решая задачу на построение, обучающиеся проводят посильные самостоятельные исследования. Исследовательский метод предполагает, что обучающиеся самостоятельно овладевают понятиями и подходом к решению проблем в процессе познания, в той или иной степени организованного учителем. В рамках такого подхода актуальны проблемы, связанные с непосредственным опытом учащихся, их жизненными потребностями и интересами [12].

Третье требование к организации исследовательской деятельности:

Организация исследовательской деятельности, проводимой с обучающимися, должна состоять из ряда этапов, выделенных в пункте 1.2.:

- 1) постановка проблемы, создание проблемной ситуации;
- 2) выдвижение гипотезы;
- 3) планирование исследовательских (проектных) работ и выбор необходимого инструментария;
- 4) поиск решения проблемы, проведение исследования (проектных работ) с поэтапным контролем и коррекцией результатов;
- 5) представление (изложение) результатов исследования или продукта проектных работ, его организация с целью соотнесения с гипотезой, оформление результатов деятельности как конечного продукта, формулирование нового знания;
- 6) обсуждение и оценка полученных результатов и применение их к новым ситуациям.

При рассмотрении данных этапов с точки зрения включения их в процессе решения практико-ориентированной задачи на построение, некоторые из них не являются целесообразными. Первый этап можно соотнести с этапом формулирования задачи учителем, также проблема может возникнуть в результате организации учителем проблемного диалога, рассмотренного в

пункте 1.2. в качестве одного из средств формирования познавательных УУД; второй этап - выдвижение гипотезы, может быть реализован в процессе решения особых задач на построение, а именно, задач на нахождение множества точек, удовлетворяющих данным условиям; третий этап относительно практико-ориентированных задач на построение предполагает выстраивание плана решения и выбор инструментария, однако в данном случае план решения известен и инструменты заранее обговорены - циркуль и линейка, поэтому этот этап исследования выполнять не требуется. Четвёртый этап представляется собой перевод практической задачи на математический язык и решение задачи на построение, которое включает анализ, построение, доказательство и исследование. На пятом этапе происходит представление продукта, его оформление, но решение задачи на построение предполагает изложение материала, таким образом, материал решения задачи излагается на четвертом этапе и пятый этап не является необходимым. Шестой этап предполагает обсуждение и оценку полученных результатов и применение их к новым ситуациям, в процессе решения задачи данный этап можно соотнести с восьмым этапом решения сюжетной задачи, а именно, с познавательным анализом задачи и её решения, на котором, по возможности, обобщают результат и делают выводы.

Рассмотрим процесс решения данного вида задач с выделением формируемых компонентов познавательных УУД на конкретном примере:

Задача: Пруд, находящийся неподалеку от деревни, имеет округлую форму. Дорожникам надо построить прямую дорогу к пруду от деревни так, чтобы дорога прилегала к пруду. [4]

I. Математизация

1. Анализ текста практико-ориентированной задачи на построение.

На данном этапе следует определить, какие объекты реальной действительности участвуют в задаче, образами каких геометрических фигур (точки, прямой, окружности) могут служить исходные реальные объекты и какими

отношениями (принадлежности, равноудаленности, касания и т.п.) можно заменить зависимости между реальными объектами.

В представленной задаче пруд округлой формы заменяется окружностью, дорога прямой, а деревня точкой, причём точка не принадлежит окружности, так как пруд «находится неподалёку», но принадлежит прямой, которая «прилегает к пруду», следовательно касается окружности.

Первый этап решения задачи требует умение работать с математическим текстом, поскольку выполняется ознакомительное, изучающее и поисковое чтение, также, при необходимости, осуществляется расширенный поиск информации, в том числе в интернете, привлекается собственный опыт, а также умение давать определения понятиям, которые являются компонентами познавательных УУД.

II. Формализация

2. Построение модели практико-ориентированной задачи. На втором этапе происходит создание математической модели рассматриваемой задачи. На данном этапе благодаря переводу практической задачи на язык математики получаем геометрическую задачу на построение.

К данной окружности построить касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

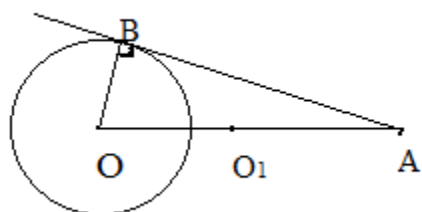
На данном этапе продолжается работа с математическим текстом, так как обучающимся необходимо преобразовать и интерпретировать текст задачи, выделить главную и второстепенную информацию, а также создать модель и схему для решения задач. Данные умения формируются при работе с математическим тестом, а как отмечалось выше, работа с математическими текстами является одним из средств формирования познавательных УУД, а формируемые умения являются компонентами познавательных УУД.

III. Внутримодельное решение

На третьем этапе происходит решение внутри математической модели. На этом этапе решается задача на построение, т.е. реализуются все этапы классической схемы решения задач такого вида.

3. Поиск способа решения задачи на построение. Данный этап решения задачи можно соотнести с анализом задачи на построение.

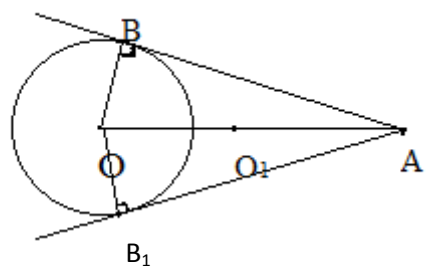
а) Анализ. При выполнении анализа предполагается, что задача решена и фигура построена, тогда становится возможно установить связь между данными и искомыми элементами.



Так как прямая АВ перпендикулярна к радиусу окружности ОВ, то решение задачи сводится к построению точки В, для которой $\angle OBA$ прямой.

4. Осуществление решения задачи на построение. На данном этапе указывается последовательность основных построений, которые достаточно произвести, чтобы искомая фигура была построена, то есть данный этап решения практико-ориентированной задачи соотносится с этапом построения.

б) Построение.



- 1) Строим отрезок ОА
- 2) Находим середину отрезка ОА- точку O_1
- 3) Проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A
- 4) Построенная окружность пересекает данную окружность в двух точках – В и B_1
- 5) Прямые АВ и AB_1 - искомые

5. Проверка решения задачи на построение. Данный этап можно соотнести с этапом доказательства задачи на построение, то есть на данном

этапе требуется установить, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

в) Доказательство.

Докажем, что построенные прямые AB и AB_1 являются искомыми касательными, то есть $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$. Действительно, $\angle ABO$ и $\angle AB_1O$ вписанные углы в окружность с центром в точке O_1 и опираются на диаметр, следовательно рассматриваемые углы прямые.

Как отмечалось в пункте 1.2. учебное доказательство является средством формирования познавательных УУД.

6. Исследование задачи на построение. На данном этапе требуется выяснить, при каких условиях задача имеет решение и сколько различных решений она имеет.

г) Исследование.

При выборе точки A вне окружности задача имеет 2 решения.

На третьем этапе метода математического моделирования формируются умения осуществлять выбор наиболее эффективного способа решения задачи в зависимости от конкретных условий, устанавливать причинно-следственные связи, преобразовывать модели и схемы для решения задачи, умение строить логические рассуждения, осуществлять сравнение, которые являются компонентами познавательных УУД.

VI. Интерпретация результата.

7. Формулирование ответа практико-ориентированной задачи. На этом этапе требуется интерпретировать результат, полученный на этапе построения на язык, соответствующий условию задачи.

На этом этапе формируется умение объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе исследования, что является компонентом познавательных УУД

8. Познавательный анализ задачи и её решения. На данном этапе требуется установить наличие более рационального решения, возможность

обобщить задачу, а также выяснить, можно ли сделать какие-либо выводы из решения этой задачи.

Из решения данной задачи можно сделать вывод, что из точки вне окружности можно провести две касательные к данной окружности.

На четвертом этапе метода математического моделирования формируются умения объяснять явления, процессы, связи и отношения, выявляемые в ходе решения задачи, осуществлять выбор наиболее эффективного способа решения задачи, проводить наблюдение, каждое из которых является компонентом познавательных УУД.

Четвертое требование к методике решения практико-ориентированной задачи на построение:

Из представленного выше решения становится видно, что многие этапы решения сюжетных задач соотносятся с этапами решения задач на построение, тогда в целях избежания повторения действий при решении практико-ориентированных задач на построение, весь процесс решения можно представить в виде последовательности следующих этапов:

I. Математизация (анализ текста практико-ориентированной задачи на построение).

II. Формализация (построение модели практико-ориентированной задачи).

III. Внутримодельное решение.

а) анализ (поиск способа решения задачи на построение);

б) построение (осуществление решения задачи на построение);

в) доказательство (проверка решения задачи на построение);

г) исследование (исследование задачи на построение).

IV. Интерпретация результата (формулирование ответа практико-ориентированной задачи).

V*. Иногда возможен такой этап как познавательный анализ задачи и её решения.

Пятое требование к отбору и конструированию практико-ориентированных задач на построение, направленных на формирование познавательных УУД:

В первой главе были рассмотрены требования к отбору и составлению практико-ориентированных задач, однако для того, чтобы с их помощью наиболее успешно формировать познавательные УУД, необходимо добавить ряд требований к условию задачи.

Практико-ориентированные задачи позволяют дополнять условие таким образом, чтобы работа над данной задачей приводила к формированию познавательных УУД. Для реализации данной потребности условие задачи может включать следующие дополнения:

- среди данных задач выберите те, которым соответствует следующая математическая модель;
- из предыдущих рассуждений сделайте вывод относительно...;
- найдите недостающую для решения задачи информацию в словаре /интернете;
- сформулируйте аналогичную задачу;
- дайте определение понятиям, входящих в данную задачу;
- установите, как изменится математическая модель, если...

Таким образом, практико-ориентированные задачи на построение требуют от обучающихся реализации всех этапов математического моделирования, умения применять накопленные знания в практической деятельности, знать и уметь применять общую схему решения задачи на построение, а также проводить исследования. Выделенные этапы решения и требования к конструированию данного вида задач позволяют убедиться, что в процессе решения практико-ориентированных задач на построение формируются практически все компоненты познавательных универсальных учебных действий.

2.3. Совокупность практико-ориентированных задач, способствующих формированию познавательных универсальных учебных действий

Задание 1.

8 класс, тема урока «Описанная окружность»

Прочитайте задачу, ответьте на вопросы и выполните задания:

Где на треугольном участке выгоднее всего поместить громоотвод, чтобы его высоту можно было сделать наименьшую?[19]

- Каково назначение громоотвода?
- Чем определяется радиус защитного действия громоотвода и как он рассчитывается? Найдите недостающую для решения задачи информацию в интернете.
- Дополните условие задачи найденными данными.
- Решите составленную задачу, выделяя 4 этапа математического моделирования.
- Исходя из исследования задачи, сделайте вывод о возможности расположения громоотвода на участке.
- Среди предложенных задач выберите ту, которой соответствует составленная математическая модель.

1. В каком месте незастроенного треугольного двора нужно поместить фонарь, чтобы все три угла двора были освещены одинаково? [22]

2. В каком месте треугольного участка, огороженного забором нужно поместить будку сторожевого пса, чтобы расстояние от будки до всех сторон забора было одинаково?

- Составьте задачу, аналогичную данной.
- Как изменится математическая модель задачи, если участок будет иметь форму квадрата? Что это будет за точка?

Ответы на вопросы:

Громоотвод нужен, чтобы предохранять сооружений от удара молнии, радиус защитного действия громоотвода определяется его высотой и приближенно равняется его двойной высоте.

Громоотвод защищает от молнии все предметы, расположенные от его основания не далее его двойной высоты. Где на треугольном участке выгоднее всего поместить громоотвод, чтобы его высоту можно было сделать наименьшую?

Решение задачи:

1. Математизация:

Какие объекты реальной действительности участвуют в задаче?

- Треугольный участок и громоотвод.

Какими математическими объектами можно заменить исходные объекты?

-Треугольник и точка.

Каково отношение между этими объектами?

- Точка лежит внутри треугольника.

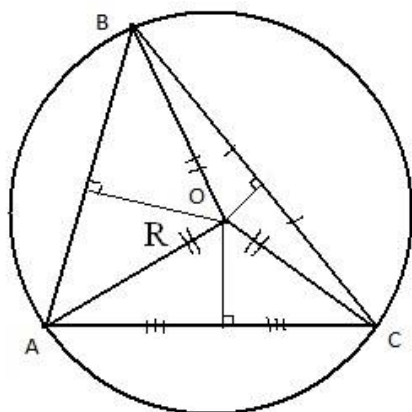
2. Формализация:

Найдите точку, равноудаленную от вершин треугольника.

3. Внутримодельное решение:

а) анализ:

предположим, что задача решена и точка O построена.

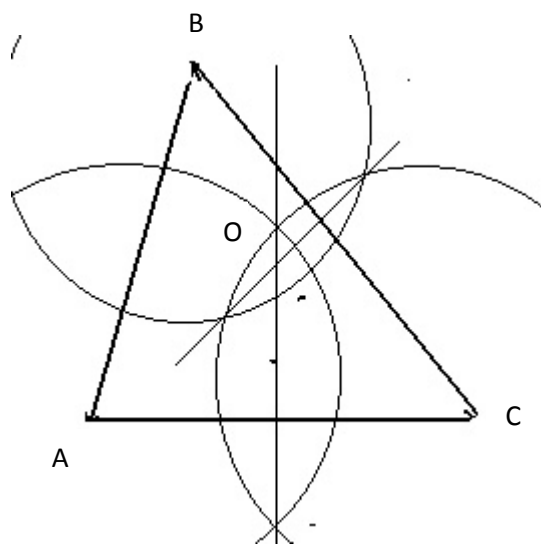


Расстояние от точки O до вершин треугольника одинаковое, т.е. $OA=OB=OC= R$. Тогда, через точки A, B, C можно провести окружность радиуса $OA=OB=OC= R$. Из предыдущих рассуждений следует, что решение

задачи сводится к построению точки O - центра описанной окружности. Центр описанной окружности- это точка пересечения серединных перпендикуляров.

б) построение:

- 1) строим серединный перпендикуляр к отрезку AC ;
- 2) строим серединный перпендикуляр к отрезку BC ;
- 3) находим точку пересечения построенных серединных перпендикуляров. Данная точка будет искомой точкой O .



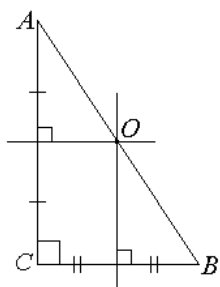
в) доказательство:

Точка O - точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам, являющимся сторонами треугольника (построение 1-3), тогда точка O - центр описанной около треугольника окружности, следовательно расстояние от точки O до вершин треугольника одинаково.

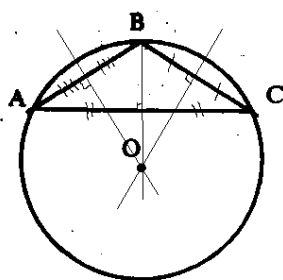
г) исследование:

Около треугольника всегда можно описать окружность и только одну, поэтому максимум может быть одно решение.

1. Если треугольник остроугольный, то искомая точка будет лежать внутри треугольника.
2. Если треугольник прямоугольный, то искомая точка лежит на середине гипотенузы.



3. Если треугольник тупоугольный, то искомая точка будет лежать вне треугольника.



4. Интерпретация результата:

- Громоотвод выгоднее всего поместить в точке O.
- Громоотвод может быть помещен внутри треугольного участка только если треугольник остроугольный.
- Из предложенных задач первая соответствует построенной модели, во второй задаче требуется найти точку, являющуюся центром вписанной окружности.
- Если в условии задачи вместо треугольного участка будет квадрат, то математическая модель будет выглядеть следующим образом:
 - Найдите точку, равноудаленную от вершин квадрата. Эта точка будет точкой пересечения диагоналей.

Задание 2.

9 класс, тема урока: «Осевая симметрия»

Решите задачу, выделяя 4 этапа математического моделирования, и ответьте на вопрос:

Для снабжения водой двух населённых пунктов, расположенных по одну сторону канала, надо построить на его берегу водонапорную башню. Где

должна находиться башня, чтобы суммарная длина труб от неё до населённых пунктов (по прямой) была наименьшей? [6]

– Как изменится математическая модель задачи, если населённые пункты будут расположены по разные стороны канала?

5. Математизация:

Какие объекты реальной действительности участвуют в задаче?

- Два населённых пункта, водонапорная башня и канал.

Какими математическими объектами можно заменить исходные объекты?

- Точки и прямая.

Каково отношение между этими объектами?

- Две точки лежат по одну сторону от прямой, одна точка принадлежит прямой.

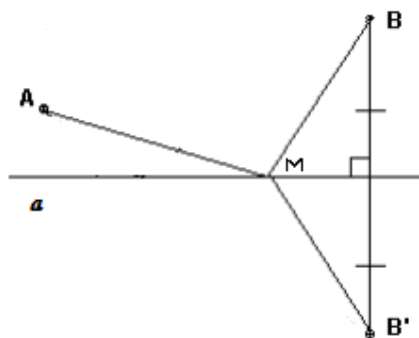
6. Формализация:

Дана прямая a и точки A и B , лежащие по одну сторону от неё. Постройте на прямой a такую точку M , чтобы ломаная AMB имела наименьшую длину.

7. Внутримодельное решение:

а) анализ:

предположим, что задача решена и точка M построена.



Длина ломаной AMB будет минимальной, когда сумма длин звеньев ломаной, т. е. $AM+MB$, будет наименьшей. Рассмотрим точку B' , симметричную B относительно прямой a . Отрезок BM равен отрезку $B'M$. Тогда длина

ломаной AMB равна $AM + MB'$. Эта длина будет наименьшей, если точка M принадлежит прямой AB' .

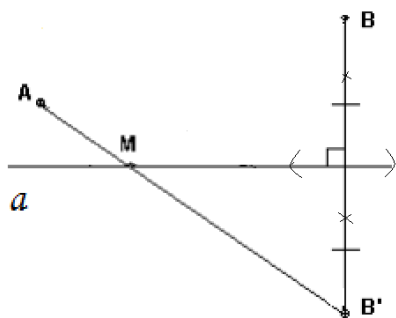
б) построение:

4) строим точку B' , симметричную точке B относительно прямой a ;

5) строим прямую $B'A$;

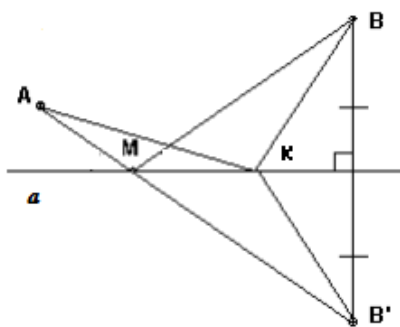
6) находим точку пересечения прямой $B'A$ и прямой a . Данная точка

будет искомой точкой M .



в) доказательство:

Длина ломаной AMB будет наименьшей, т.к. если возьмём любую другую точку K , принадлежащую прямой a , тогда $AK + KB = AK + KB' > AB' = AM + MB$.



г) исследование:

задача имеет единственное решение.

8. Интерпретация результата:

Водонапорная башня должна находиться в точке M .

Задание 3

8 класс, тема урока: «Окружность»

Решите задачу и выполните задание:

Рядом с круглым бассейном необходимо построить беговую дорожку, которая бы располагалась вокруг круглого парка определённого радиуса, так, чтобы с беговой дорожки был выход к бассейну и к входу в спортивную школу.

– Составьте задачу, аналогичную данной.

1. Математизация:

Какие объекты реальной действительности участвуют в задаче?

-Круглый бассейн, беговая дорожка вокруг круглого парка, вход в спортивную школу.

Какими математическими объектами можно заменить исходные объекты?

- Две окружности и точка.

Каково отношение между этими объектами?

- Точка принадлежит одной из окружностей, окружности касаются друг друга.

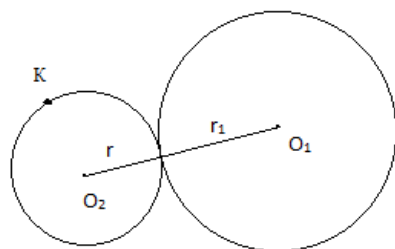
2. Формализация:

Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

3. Внутримодельное решение:

а) анализ:

предположим, что задача решена и окружность построена.



1). Расстояние от точки O_1 до точки O_2 равно сумме радиусов r_1+r , т.е. точка O_2 принадлежит множеству точек, находящихся на расстоянии r_1+r от точки O_1 .

2). Расстояние от точки K до точки O_2 равно r , т.е. O_2 принадлежит множеству точек, находящихся на расстоянии r от точки K .

3). Точка O_2 принадлежит пересечению множеств 1) и 2)

б) построение:

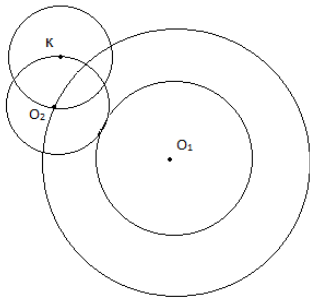
1) строим отрезок r_1+r ;

2) строим окружность 1 с центром в точке O_1 , радиусом r_1+r ;

3) строим окружность 2 с центром в точке K , радиусом r ;

4) находим точку пересечения окружности 1 и окружности 2. Это искомая точка O_2 ;

5) строим окружность 3 с центром в точке O_2 радиусом r .



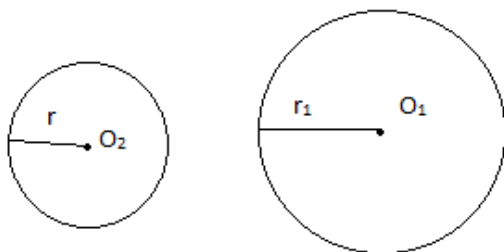
в) доказательство:

1) отрезок O_1O_2 равен r_1+r , поэтому окружность 3 касается данной окружности (построение 2) ;

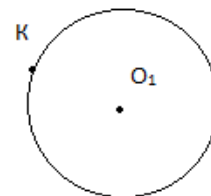
2) точка K принадлежит окружности 3 (построение 3);

г) исследование:

1. $\rho(O_1, K) > r_1+2r$ - нет решений

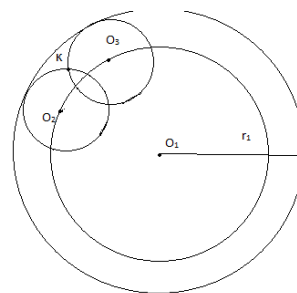
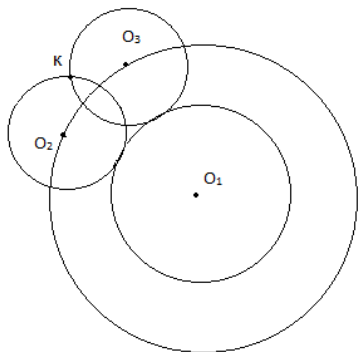


4. $\rho(O_1, K) = r_1$ - нет решений



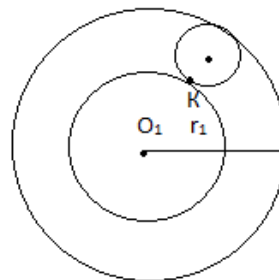
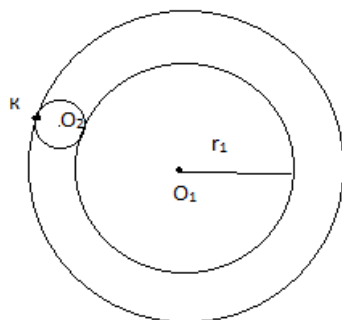
5. $r_1 > \rho(O_1, K) > r_1 - 2r$ - два решения

2. $r_1 < \rho(O_1, K) < r_1 + 2r$ - два решения

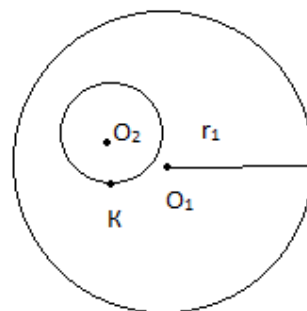


6. $\rho(O_1, K) = r_1 - 2r$ - одно решение

3. $\rho(O_1, K) = r_1 + 2r$ - одно решение



7. $\rho(O_1, K) < r_1 - 2r$



4. Интерпретация результата:

Беговую дорожку можно построить во 2 и 3 случаях исследования, выполнив все пункты построения.

Задание 4:

8 класс, тема урока «Квадрат»

Решите задачу и выполните задание:

Застройщик собирается вырубить участок леса под постройку заповедника квадратной формы. Планируется разделить заповедник на две части (для разных видов животных), натянув сетку между противоположными углами. Застройщику необходимо получить разрешение у лесника. Лесник разрешил вырубить участок леса с одним условием: чтобы сумма длин одной

стороны забора, окружающего заповедник и внутренней сетки имела определенное значение. Как построить заповедник, чтобы условие лесника было выполнено?

– Составьте задачу, аналогичную данной.

1. Математизация:

Какие объекты реальной действительности участвуют в задаче?

- квадратный заповедник, сетка, сторона забора

Какими математическими объектами можно заменить исходные объекты?

-квадрат, 2 отрезка

Каково отношение между этими объектами?

- длина суммы двух отрезков является длиной суммы стороны квадрата и его диагонали.

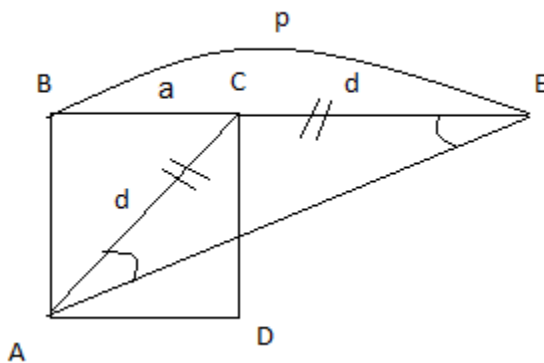
2. Формализация:

Построить квадрат по сумме стороны и диагонали.

3. Внутримодельное решение:

а) анализ:

предположим, что задача решена и искомым квадрат построен.



1) $BC + CE = p$;

2) рассмотрим треугольник ACE: $AC = CE = d$, $\angle ACE = 135^\circ$,
 $\angle CAE = \angle CEA = (180^\circ - 135^\circ) / 2 = 45^\circ / 2$;

3) $AB \perp BE$, $AD \perp AB$, $CD \perp BE$.

б) построение:

1) строим отрезок $BE=r$;

2) доп. построение: строим прямой угол, биссектрису угла 90° , затем проводим биссектрису полученного угла

3) строим $\angle BEK=45^\circ/2$ (получен из пункта 2);

4) строим прямую $a \perp BE$, B принадлежит a ;

5) находим точку пересечения прямой EK и прямой a . Найденная точка будет вершиной квадрата A ;

6) строим $\angle EAM=45^\circ/2$;

7) находим точку пересечения прямой AM и прямой BE . Найденная точка будет вершиной квадрата C ;

8) строим прямую $AK \perp AB$;

9) строим прямую $ST \perp BE$;

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

Во 2 главе были рассмотрены следующие вопросы:

1. Логико-математический анализ темы «Задачи на построение»
2. Требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение
3. Разработана совокупность практико-ориентированных задач, способствующих формированию познавательных универсальных учебных действий обучающихся

Логико-математический анализ темы «Задачи на построение» показал, что особое место с точки зрения включения в образовательный процесс практико-ориентированных задач занимает школьный курс планиметрии, в частности задачи на построение, которые являются неотъемлемой частью школьного курса геометрии.

Выделенные требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение показал, что решение практико-ориентированных задач на построение требует от обучающихся реализации всех этапов математического моделирования, умения применять накопленные знания в практической деятельности, знать и уметь применять общую схему решения задачи на построение, а также проводить исследования. Выделенные этапы решения и требования к конструированию данного вида задач позволяют убедиться, что в процессе решения практико-ориентированных задач на построение формируются практически все компоненты познавательных универсальных учебных действий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время в процессе обучения приоритет отдается формированию универсальных учебных действий, в частности познавательных, которые определяют успешность обучения. В процессе написания данной выпускной квалификационной работы был проведён анализ методической и психолого-педагогической литературы, который позволил раскрыть сущность понятия «познавательные универсальные учебные действия», также были изучены требования к организации учебного процесса, направленного на формирование познавательных УУД на уроках математики. В процессе работы было выяснено, что одним из средств формирования познавательных универсальных учебных действий являются практико-ориентированные задачи.

Анализ литературы, посвященной практико-ориентированному обучению, позволил дать более точное определение понятия «практико-ориентированная задача». Были изучены цели включения данных задач в процесс обучения математике.

Практико-ориентированные задачи обуславливают связь математики с жизнью, поэтому вызывают повышенный интерес у учащихся и создают дополнительную мотивацию к учению. Решая данные задачи, обучающиеся лучше усваивают информацию, так как видят взаимосвязь с реальными объектами.

В ходе данной работе стала очевидна значимость практико-ориентированных задач в процессе формирования познавательных УУД. Особую группу практико-ориентированных задач и особое место в формировании познавательных УУД занимают задачи на построение, поэтому был проведен логико-математический анализ темы «Задачи на построение» и выделены требования к организации процесса обучения, направленного на формирование познавательных УУД обучающихся в ходе решения практико-ориентированных задач на построение, которые были продемонстрированы на примерах задач из курса геометрии 7-9 классов.

Таким образом, все задачи данной работы решены и цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боженкова Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. 3 изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 208 с.
2. Боженкова Л. И. Познавательные универсальные учебные действия в обучении математике // Наука и школа. 2016. №1. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/poznavatelnye-universalnye-uchebnye-deystviya-v-obuchanii-matematike> (дата обращения: 25.04.2017).
3. Большой энциклопедический политехнический словарь/ коллектив авторов, Мультитрейд, 2004.
4. Воистинова Г. Х., Солощенко М. Ю. Обучение решению задач на построение с практическим содержанием // Фундаментальные исследования. 2014. №3-4. URL:<http://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-resheniyu-zadach-na-postroenie-s-prakticheskim-soderzhaniem> (дата обращения: 16.04.2016).
5. Геометрия 7-9 классы / Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., и др., 21 изд. М.: Просвещение, 2011. 384 с.
6. Геометрия 7-9 классы / Погорелов А.В. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 240 с.
7. Геометрия. 7 класс / Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. М. Просвещение. 2013. 176с.
8. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы: пособие для учителей общеобразов. учреждений/ составитель Бурмистрова Т.А.. М.: Просвещение, 2011. 95 с
9. Глоссарий ФГОС // Городской методический центр URL: <http://mosmetod.ru/metodicheskoe-prostranstvo/srednyaya-i-starshaya-shkola/ekonomika/fgos/glossarij-fgos.html> (дата обращения: 27.03.17).
10. Горленко Н.М., Запятая О.В., Лебединцев В.Б., Ушева Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование. 2012. №4. С. 153-160.

11. Егупова М.В. Методическая система подготовки учителя к практико - ориентированному обучению математике: дис. д-р пед. наук: 13.00.02. М., 2014. 452 с

12. Ильина Л. Б. Использование исследовательского метода обучения в проектной деятельности учащихся // Отечественная и зарубежная педагогика. 2012. №6. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/issledovatelskogo-metoda-obucheniya-v-proektnoy-deyatelnosti-uchaschihsya> (дата обращения: 09.05.2017).

13. Как проектировать универсальные учебные действия в начальной школе: от действия к мысли: пособие для учителя / Асмолов А.Г., Бурменская Г.В., Володарская И.А. и др., Под ред. Асмолова А.Г. М.: Просвещение , 2008. 151 с.

14. Лушников И.Д., Ногтева Е.Ю. Формирование познавательных универсальных учебных действий в технологиях проектной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся: пособие для учителя. Вологда: Вологодский институт развития образования, 2013. 176 с.

15. Мельникова Е. Л. Предметная специфика проблемного диалога // Эксперимент и инновации в школе. 2009. №1. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/predmetnaya-spetsifika-problemnogo-dialoga> (дата обращения: 26.04.2017).

16. Мишенина О. В., Ощепкова Е. А. Прикладная направленность математического курса как средство формирования профессиональной компетентности будущего специалиста // Педагогическое образование в России. 2016. №1. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/prikladnaya-napravlennost-matematicheskogo-kursa-kak-sredstvo-formirovaniya-professionalnoy-kompetentnosti-buduschego-spetsialista> (дата обращения: 15.03.2017).

17. Москевич Л. В. Формирование личностных, регулятивных, коммуникативных, познавательных УУД на уроках математики в основной школе // Развитие универсальных учебных действий учащихся в условиях реали-

зации ФГОС основных общеобразовательных программ. Выпуск 3: сборник материалов . Киров: МЦИТО, 2015.

18. Новикова Л. Ю. Использование предметного опыта учащихся при обучении математике как условие формирования универсальных учебных действий // Вестник ТГПУ. 2011. №10. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-predmetnogo-opyta-uchaschihsya-pri-obuchenii-matematike-kak-uslovie-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy> (дата обращения: 22.04.2017).

19. Перельман, Я.И. Практические занятия по геометрии. М.: Петроград, 1923. 129 с.

20. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959. 208 с..

21. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / сост. Е. С. Савинов. М.: Просвещение, 2011. 454 с.

22. Реальные задачи Я.И. Перельмана // Математика в школе. 2016. №1. С. 30-34.

23. Сергеева Л. А. Практико-ориентированные задания как средство реализации прагматического аспекта математического языка // Вестник Псковского государственного университета. 2014. №5. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/praktiko-orientirovannye-zadaniya-kak-sredstvo-realizatsii-pragmaticheskogo-aspekta-matematicheskogo-yazyka> (дата обращения: 7.05.2016).

24. Степанова О. В. Развитие познавательных универсальных учебных действий как педагогическая проблема // Молодой ученый. 2016. №2. С. 851-853.

25. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования/ Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 декабря 2010 г. № 1897, в ред. Приказа Минобрнауки России от 29.12.2014 № 1644

26. Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя / Асмолов А. Г., Бурменская Г. В., Володарская И. А и др., под ред. Асмолова А. Г. М. : Просвещение, 2010. 159 с.

27. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998. 244 с.

28. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся старших классов.. 3-е изд. М.: Просвещение, 1989. 192 с.

29. Фундаментальное ядро содержания общего образования : проект / под ред. Козлова В. В., Кондакова А. М. —М. : Просвещение, 2009. — 48 с.

30. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «Познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. 2014. №6. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/normativnyy-kontekst-opredeleniya-poznavatelnye-universalnye-uchebnye-deystviya> (дата обращения: 18.03.2017).

31. Чуракова Р.Г. Научим ли мы плавать без воды? // Методист. 2005. №5

32. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 96с.

33. Эрентраут, Е.Н. Практико-ориентированные задачи как средство реализации прикладной направленности курса математики в профильных школах: автореф. дис. ... канд. пед. наук. -Екатеринбург, 2005. 24с