ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Введение стандартов второго поколения является фактором реализации нового подхода к современному образованию. Процесс учения понимается не только как усвоение системы знаний, умений и навыков, составляющих инструментальную основу компетенций учащегося, но и как процесс развития личности, обретение духовно-нравственного и социального опыта.

Одной из приоритетных задач образования сегодня является «создание необходимых и полноценных условий для личностного развития каждого ребенка, приобретение им в процессе освоения образовательных программ знаний, умений, навыков и формирование компетенций, необходимых для жизни человека в обществе, осознанного выбора профессии и получения профессионального образования» (Закон об образовании).

Анализ документа «Современная модель образования 2020»показывает, что владение информационными технологиями, умение заботиться о своем здоровье, вступать в коммуникацию, решать проблемы – новые составляющие современного востребованного обществом качества образования. Наиболее характерен переход от установки на запоминание большого количества информации к освоению новых видов деятельности – проектных, творческих, исследовательских. В Федеральном государственном стандарте данная позиция отражена в концепции универсальных учебных действий (УУД).

Среди метапредметных универсальных учебных действий (далее УУД) особое значение имеют познавательные УУД, т.к. именно от их становления зависит результативность всего последующего образования человека.

Познавательные универсальные действия, включающие в себя общеучебные и логические действия, а также действия постановки и решения проблем готовят школьника к решению любой проблемы – задачи.

Однако сегодняшний школьник не всегда способен самостоятельно организовать собственную познавательную деятельность, часто не умеет осуществлять поиск и анализ информации, формулировать задачи и находить вариативные способы решения проблемных ситуаций, выдвигать гипотезы и проверять их состоятельность.

В связи с этим целесообразно найти такие средства, которые способствуют развитию выше перечисленных навыков. Одним из них являются сюжетные задачи, так как процесс решения этого вида задач ставит ученика в ситуацию поиска различных способов разрешения проблемных ситуаций и выбора из них единственно правильного, что требует обдуманного и логически правильного подхода. Именно это и послужило обоснованием выбора темы исследования «Формирование познавательных универсальных учебных действий в процессе решения геометрических задач».

Объект исследования: процесс обучения геометрии в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: геометрическая задача как средство формирования познавательных УУД .

Цель исследования: разработка комплекса геометрических задач, направленных на формирование познавательных ууд.

В соответствии с целью, предметом и объектом исследования были выдвинуты следующие задачи:

1. Провести анализ психолого-педагогической и методической литературы по теме исследования.
2. Раскрыть сущность понятия «познавательные универсальные учебные действия».
3. Выделить средства, направленные на формирование познавательных универсальных учебных действий у обучающихся.

4. Обосновать формирование познавательных универсальных учебных действий на этапах решения геометрических задач.

5. Сформулировать требования к отбору геометрических задач.

6. Разработать комплекс геометрических задач, направленных на формирование познавательных универсальных учебных действий.

ГЛАВА I. ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ.

1.1.Сущность понятия познавательных универсальных учебных действий.

Геометрия формирует систему знаний о картине окружающего мира. В связи с этим основная задача в современных условиях, это не передача готовых знаний (учебно-предметное содержание). Необходимостью становится включать в контекст обучения предмету решение жизненных задач.

На первый план выходит знакомство с методами научного познания, постановка проблемы, а также ее самостоятельное решение.

В качестве учебного предмета в школе геометрия формирует систему знаний об окружающем мире. Она раскрывает роль науки в культурном и экономическом развитии общества, способствует формированию современного научного мировоззрения. Для формирования основ научного мировоззрения, развития познавательных интересов и интеллектуальных способностей школьников в процессе изучения геометрии основное внимание уделяется не передаче готовых знаний, а знакомству с методами научного познания окружающего мира, постановке проблем, которые требуют от школьников самостоятельной деятельности по их разрешению. Значение геометрии как составной части общего образования состоит в том, что она вооружает учащегося научным методом познания, который позволяет получать объективные знания об окружающем мире, позволяет наиболее эффективно формировать все виды универсальных учебных действий (УУД) и тем самым дает школьникам возможность использовать полученные знания в повседневной жизни.

Приступая к изучению данного предмета, школьники знакомятся с новой и неизвестной им терминологией, овладевают незнакомыми формами мышления. Это довольно сложный процесс и, как правило, школьники ориентируются в нем интуитивно, вслепую.

Современный этап развития российского образования характеризуется переориентацией в определении образовательных результатов школьников, от определения цели обучения как усвоение навыков, умений и знаний, к определению цели обучения как формирование коммуникативных, социальных, познавательных и личностных способностей, обеспечивающих умение учиться.

Вопросы, которые связаны с развитием и анализом умения учиться, поднимаются учеными в контексте обсуждения проблем учебной деятельности. Таким образом, в этом понимании достижение умения учиться предполагает эффективное и самостоятельное выполнение учебной деятельности.

Различные определения понятия «учебная деятельность» обусловливают и различные подходы к пониманию, что значит учиться.

В педагогическом толковании учиться выполнять все то, что предусмотрено обучающим в учебном процессе или образовательным учреждением. При данном подходе «ребенок учится» охватывает то, что ученик делает в период обучения дома и в школе, и то, что обусловлено данным обучением.

Разработчиками ФГОС общего образования 2 поколения выделяются ряд функций универсальных учебных действий (см. рисунок 2).

[redacted]

Рисунок 2. Функции универсальных учебных действий.

Универсальный характер учебных действий проявляется в следующем:

- они обеспечивают преемственность всех ступеней образовательного процесса;
- они носят метапредметный и надпредметный характер;
- они лежат в основе регуляции и организации любой деятельности учащегося независимо от ее специально-предметного содержания;
- они обеспечивают этапы усвоения учебного содержания и формирования психологических способностей школьника;

- они обеспечивают целостность познавательного, личностного и общекультурного развития, самосовершенствования и саморазвития личности.

Развитие в системе образования личности обеспечивается благодаря формированию УУД, которые выступают инвариантной основой воспитательного и образовательного процесса и от качества овладения которыми зависят во многом успехи в последующих классах. Тем не менее, без специально организованной деятельности и целенаправленной подготовки формирование УУД школьников не происходит.

Таким образом, термин «универсальные учебные действия» в широком значении означает умение учиться. Термин «универсальные учебные действия» в более узком значении можно определить как совокупность способов действия ученика, обеспечивающих его способность к самостоятельному усвоению новых знаний и умений, включая организацию данного процесса.

Проанализировав различные подходы к определению понятия «познавательные универсальные учебные действия» в данной работе будем придерживаться формулировки Н.А. Чулановой и Т.Н. Черняевой: «Познавательные УУД – это умственные действия, направленные на планирование, осуществление анализа своей познавательной деятельности и управление ею, на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях».[44, 186 с.] Данное определение отражает все сущностные черты познавательных УУД в соответствии с ФГОС, учитывает основные виды деятельности обучающегося и обосновывает возможность формирования познавательных действий в процессе обучения математике.

Познавательные универсальные учебные действия включают в себя общеучебные действия, включая знаково-символические; логические и действия постановки и решения проблем[CITATION Сав \l 1049].

В число *общеучебных действий* входят: самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели; поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска, в том числе с помощью компьютерных средств; знаково-символические действия, включая моделирование (преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта, и преобразование модели с целью выявления общих законов, определяющих данную предметную область);умение структурировать знания; умение осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; рефлексия способов и условий действия; контроль и оценка процесса и результатов деятельности; смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; определение основной и второстепенной информации; свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации; умение адекватно, подробно, сжато, выборочно передавать содержание текста, составлять тексты различных жанров, соблюдая нормы построения текста (соответствие теме, жанру, стилю речи и др.).

Общеучебные УУД представлены на рисунке 2.

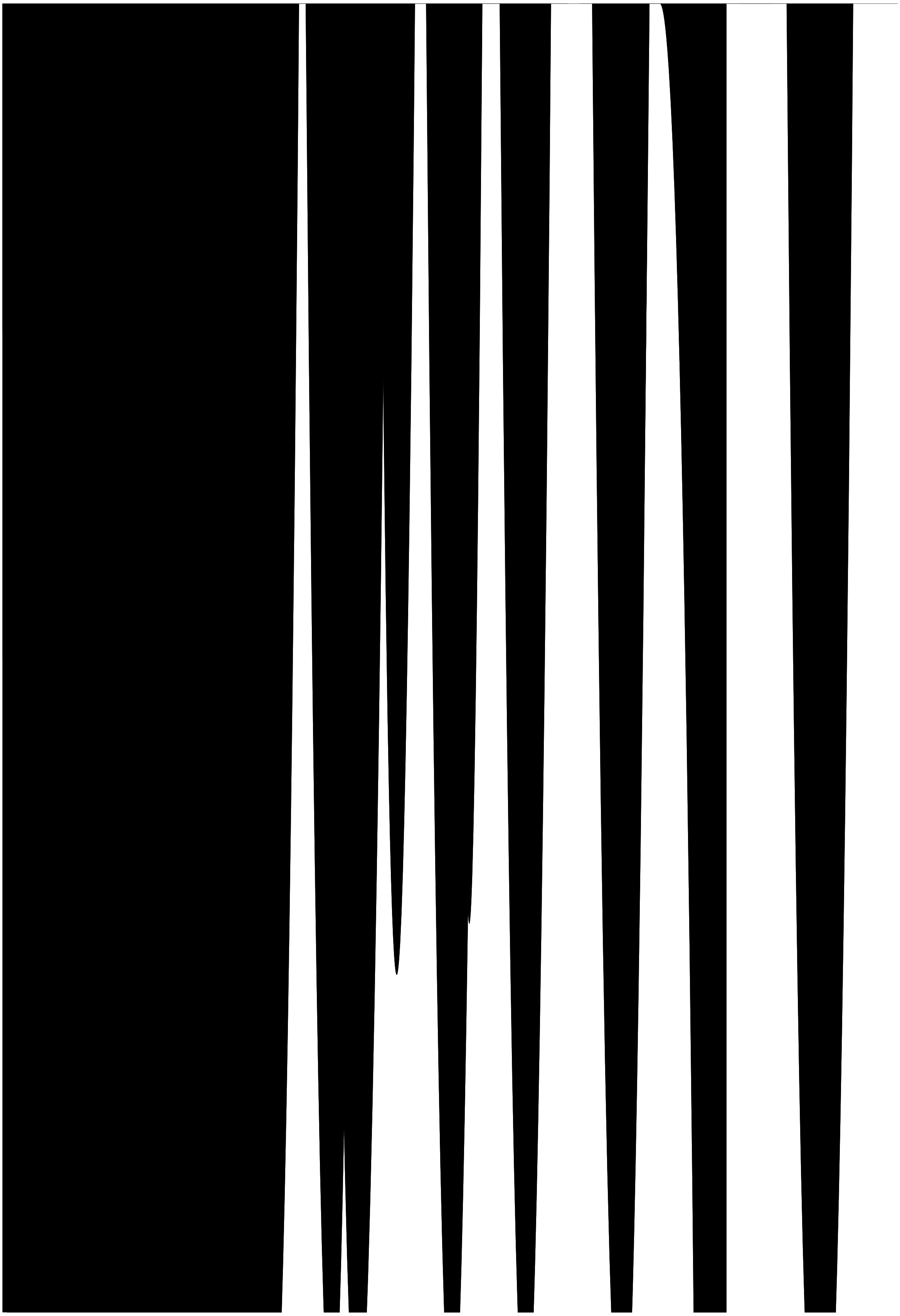


Рисунок 2. Общеучебные универсальные действия

Наряду с общеучебными также выделяются универсальные *логические* действия: анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); синтез как составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание, восполнение недостающих компонентов; выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов; подведение под понятия, выведение следствий; установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждений, доказательство; выдвижение гипотез и их обоснование.

Действия *постановки и решения проблем* включают формулирование проблемы и самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера.[3, с 9 – 10]

Познавательные универсальные учебные действия неразрывно связаны с развитием познавательных процессов и предполагают умение выбирать и применять разные методы познания окружающего мира по его целям (наблюдение, опыт, эксперимент, моделирование, вычисление); выявлять особенности (качества, признаки) разных объектов в процессе их рассматривания (наблюдения); анализировать результаты опытов, элементарных исследований; фиксировать их результаты; воспроизводить по памяти информацию, необходимую для решения учебной задачи; проверять информацию, находить дополнительную информацию, используя справочную литературу; применять таблицы, схемы, модели для получения информации; презентовать подготовленную информацию в наглядном и вербальном виде.

Логические действия (см. рисунок 3) имеют наиболее общий характер. Они направлены на установление отношений и связей в каждой из областей знания. В рамках школьного образования под логическим мышлением следует понимать умение и способность школьников производить простые логические действия (обобщение, синтез, сравнение, анализ и так далее), и кроме того, составные логические операции (построение опровержение, утверждение и отрицания как построение рассуждения с использованием разных логических схем – дедуктивной или индуктивной) [CITATION Ана \l 1049].

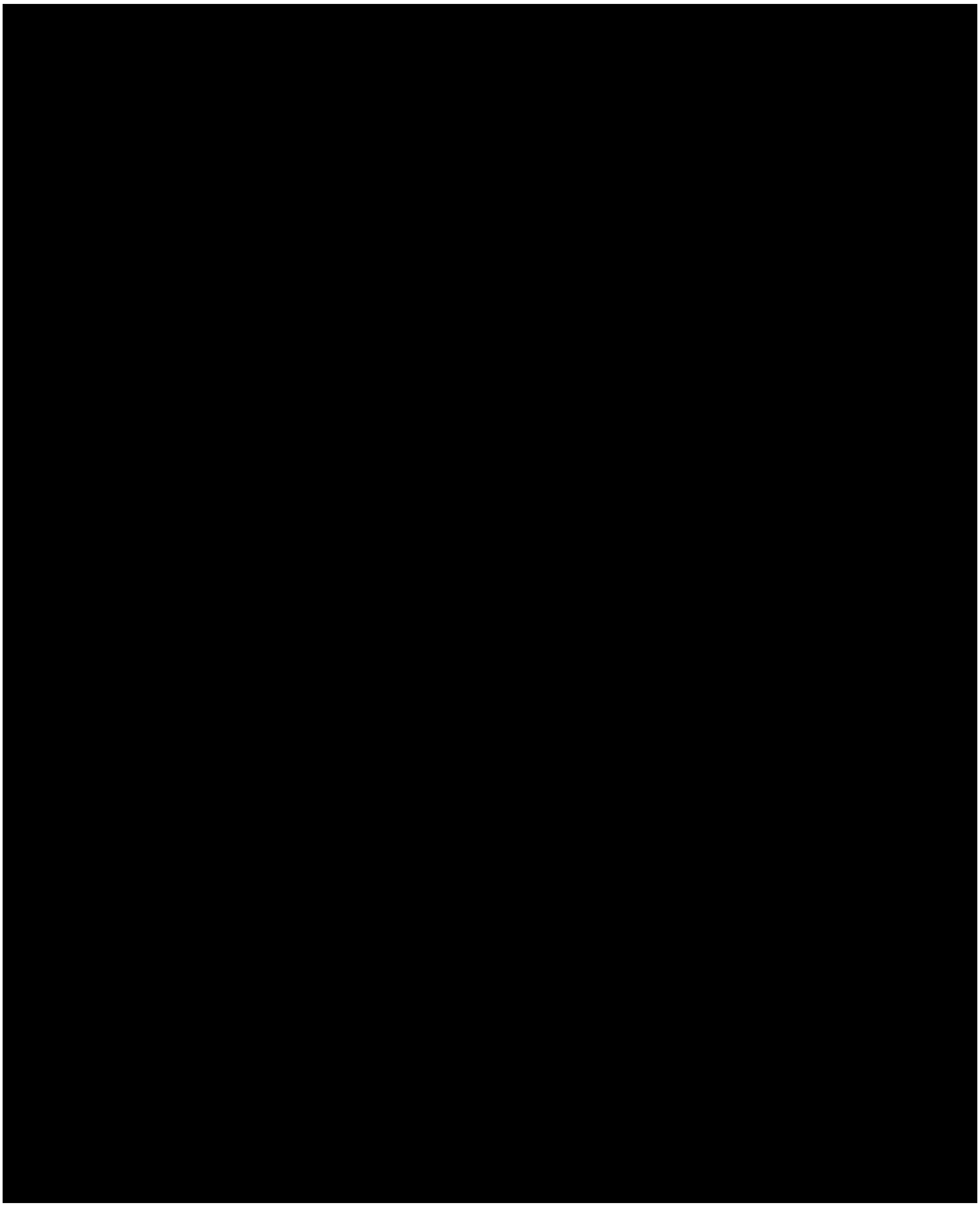


Рисунок 3. Логические действия

Методологической основой формирования УУД учеников является теория деятельности Алексея Николаевича Леонтьева, на основе которой основано учение Гальперина П.Я. (о поэтапном формировании умственных действий). Согласно учению Гальперина П.Я. предметом формирования должны стать действия, которые понимаются как способы решения определенного класса задач. В связи с этим необходимо построить и выделить некоторую систему условий, учет которых не только обеспечивает, но также и «вынуждает» школьника действовать правильно, с заданными показателями и в требуемой форме.

Ведущую роль в формировании познавательных универсальных учебных действий играет подбор содержания, выбор эффективных методических приемов, разработка конкретного набора наиболее ярких и интересных ученикам учебных заданий.

1.2 Геометрическая задача как одно из средств формирования познавательных УУД.

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования одной из важнейших задач становится развитие универсальных учебных действий учащихся, в том числе и познавательных [3].

Предмет «Геометрия» по своему содержанию и организации способов учебной деятельности имеет огромные возможности для реализации заявленных в стандарте требований. Результатом формирования познавательных универсальных учебных действий школьников при обучении математике являются умения:

- произвольно и осознанно владеть общим приемом решения задач;
- осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий;
- использовать знаково-символические средства;
- выделять существенную информацию из текстов разных видов;
- осуществлять анализ и синтез;
- планировать и осуществлять деятельность;
- устанавливать причинно-следственные связи;
- устанавливать аналогии и т.д. [1]

Средством достижения данных требований в процессе обучения математике может являться задача, как основная дидактическая единица школьного курса математики в процессе решения задач у учащихся в полной мере формируются компоненты познавательных универсальных учебных действий. Необходимо определить, что такое задача. По мнению Л.М. Фридмана задача – это требование, которое надо изучить и вопрос, на который необходимо найти ответ, основываясь и учитывая указанные в задаче условия.

Для формирования познавательных УУД учащихся на уроках математики можно использовать разнообразные приемы и методы работы:

- стимулирование учеников к высказыванию без боязни ошибиться;
- создание на уроке педагогических ситуаций общения, позволяющих каждому учащемуся проявить самостоятельность, инициативу (например, задания поискового характера);
- игровые методы;
- применение возможностей ИКТ и наглядности: схем, таблиц, опор;
- создание обстановки для самовыражения каждого учащегося;
- подбор занимательного дидактического материала;
- оценка не только конечного результата, но и процесса деятельности ученика, самоконтроль и самооценка;
- взаимопроверка ученических работ;
- привлечение к оценке ответов, результата деятельности одноклассников [8];
- командные математические соревнования;
- числовой/буквенный диктант [9].

Для формирования познавательных УУД учащихся на уроках геометрии можно использовать разнообразные приемы и методы работы:

- выполнение чертежа по условию задач;
- решение геометрические задачи с опорой на изученные свойства фигур и отношений между ними, применяя дополнительные построения;
- проведение доказательных рассуждений при решении задач, с использованием известных теоремы, с поиском возможности для их использования.

Проблема формирования познавательной деятельности учащихся не может быть успешно решена без включения в обучение математике заданий поискового характера, в число которых входят проблемные задачи, предполагающие поисковую деятельность школьников в ходе решения задач. Умение их решать – важнейший критерий достигнутой познавательной самостоятельности.

Существенными признаками заданий поискового характера являются следующие:

- выполнение их без непосредственного участия учителя (проблемные задачи) или с частичной подсказкой с его стороны (частично-поисковый характер);
- открытие учащимися в процессе выполнения заданий новых знаний или новых способов добывания этих знаний.

В современной литературе существуют разные классификации учебных заданий в зависимости от классификационного признака. Современному учителю необходимо ориентироваться в данном разнообразии и понимать, когда использовать ту или иную задачу для достижения определенных целей.

Нами был проведен анализ соответствия между классификациями задач и компонентами познавательных универсальных учебных действий, с целью выявления тех типов задач, систематическое использование которых в процессе обучения математике позволит продуктивно формировать познавательные универсальные учебные действия школьников.

Результаты анализа представлены в виде схемы на примере одной из классификаций (рис. 1) [2].

Классификация задач по уровню проблемности

- стандартные
- обучающие
- поисковые
- проблемные

Познавательные УУД

ОБЩЕУЧЕБНЫЕ:

- структурирование знаний;
- осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;
- выбор наиболее эффективных способов решения задач;
- рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности;
- самостоятельное создание алгоритмов деятельности;
- знаково-символические

ЛОГИЧЕСКИЕ:

- синтез как составление целого из частей;
- установление причинно-следственных связей;
- построение логической цепи рассуждений;
- выдвижение гипотез и их обоснование

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ

- формулировка проблемы;
- самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера

Рис.1.

Таким образом, при решении разных видов геометрических задач у обучающихся формируются все виды познавательных УУД, то есть задача является эффективным средством формирования УУД.

1.3 Формирование познавательных УУД на различных этапах решения геометрических задач

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования одной из важнейших задач становится развитие универсальных учебных действий учащихся, в том числе и познавательных [3].

Предмет «Геометрия» по своему содержанию и организации способов учебной деятельности имеет огромные возможности для реализации заявленных в стандарте требований.

Практически каждая геометрическая задача требует индивидуального анализа и выбора пути решения.

Выделяют следующие этапы решения геометрических задач [2]:

1) чтение условия задачи;
2) выполнение чертежа с буквенными обозначениями;
3) краткая запись условия задачи;
4) перенос данных на чертеж;
5) анализ данных задачи;
6) составление цепочки действий;
7) запись решения задачи;
8) запись ответа.

Проиллюстрируем алгоритм работы с геометрической задачей на конкретном примере с описанием познавательных УУД, формирование которых происходит на каждом из этапов .

Решение большинства геометрических задач ОГЭ требует применения метрических соотношений в треугольнике. «Метрическими соотношениями в треугольнике называются формулы, связывающие длины различных отрезков, величины углов, его площадь» [3]. Наиболее важными из этих соотношений являются теоремы косинусов и синусов, теорема о сумме углов треугольника, теорема Пифагора, формула Герона.

Задача. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана ADперпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника ABC[4].

Рассмотрим решение данной задачи в соответствии с указанным ранее алгоритмом.

1 этап. На этом этапе выделяются геометрические объекты и их существенные признаки, необходимые для построения чертежа.

На данном этапе происходит формирование ПУУД

- самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели;

- поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска

-смысловое чтение как осмысление цели чтения и выбор вида чтения в зависимости от цели; извлечение необходимой информации из прослушанных текстов различных жанров; определение основной и второстепенной информации; свободная ориентация и восприятие текстов художественного, научного, публицистического и официально-делового стилей; понимание и адекватная оценка языка средств массовой информации;

-анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, и несущественных);

2 этап. На данном этапе выполняется построение чертежа, вводятся буквенные обозначения (рис. 1).

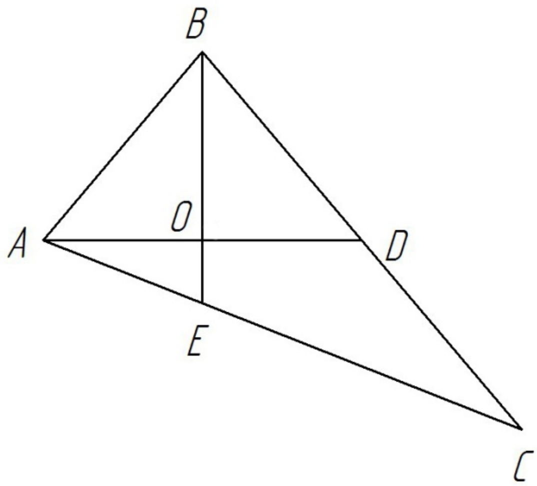


Рис. 1. Выполнение чертежа с буквенными обозначениями

Данный этап производит формирование таких ПУУД, как

- моделирование — преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта пространственно-графическая или знаково-символическая).

-синтез — составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов;

3 этап. На основе результатов 1-2 этапов делается краткая запись условия задачи.

На этом этапе продолжается формирование моделирования, формируются такие ПУУД как

-структурирование знаний;

- осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме

4 этап.

На этом этапе необходимо организовать фронтальную работу с классом по следующим вопросам:

О чем говорится в условии задачи?

Что нам известно о треугольнике ABC?

Что требуется найти в задаче?

Формируются следующие познавательные УУД :

- поиск и выделение необходимой информации; применение методов информационного поиска

- структурирование знаний;

осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

-постановка и формулирование проблемы, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

5 этап. Продолжается фронтальная работа с классом. Примерный перечень вопросов может быть таким:

- Что можно сказать об углах *ABO* и *DBO*?
- Что можно сказать о треугольниках *ABO* и *DBO*?
- Что следует из равенства треугольников *ABO* и *DBO*?
- Какого вида треугольник *ABD*?
- Чем является биссектриса *BO* в равнобедренном треугольнике *ABD*?
- Чему равны отрезки *AO* и *OD*?

Проведем отрезок *ED* и рассмотрим треугольник *BEC* (рис. 2). Чем является отрезок *ED* в треугольнике *BEC*?

- Что можно сказать о площадях треугольников *EDC* и *EDB*?
- Чему равны площади треугольников *EDC* и *EDB*?
- Чему равна площадь треугольника *ABE*?
- Чему равна площадь треугольника *ABC*?
-Чему равна площадь треугольника *ABD*?

Чему равен отрезок *BO*?

Что можно сказать о треугольнике *ABO*?

Можем ли мы найти сторону *AB* треугольника *ABO*? Если да, то как?

Чему равна сторона *BC* треугольника *ABC*?

Рассмотрим треугольник *AOE*. Чему равен отрезок *OE*?

Что можно сказать о треугольнике *AOE*?

Можем ли мы найти сторону *AE* треугольника *AOE*? Если да, то как?

Чему равен отрезок *CE* в треугольнике*ABC*?

Чему равна сторона *AC* треугольника *ABC*?

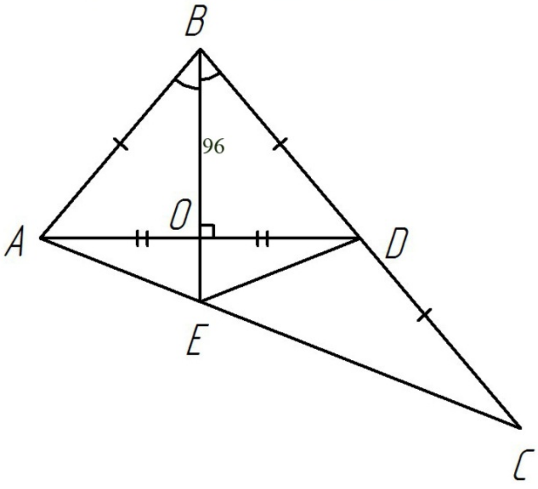


Рис. 2. Выполнение дополнительных построений

На данном этапе происходит формирование следующих ПУУД

- синтез — составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов;
- выбор оснований и критериев для сравнения, сериации, классификации объектов;
- подведение под понятие, выведение следствий;
- установление причинно-следственных связей;
- построение логической цепи рассуждений;
- доказательство;
- выдвижение гипотез и их обоснование.

6 этап. На этих этапах выполняется оформление решения задачи в тетради и записывается ответ. Формируются такие ПУУД, как

- структурирование знаний;
- моделирование — преобразование объекта из чувственной формы в модель, где выделены существенные характеристики объекта пространственно-графическая или знаково-символическая);
- осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме.

Технология формирования познавательных УУД на различных этапах решения геометрических задач состоит из компонентов:

- алгоритм составления таких задач;
- методы и приёмы использования задач на различных этапах урока;
- мониторинг качества математической подготовки учащихся и интереса к предмету.

Алгоритм составления геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД:

- определение цели задачи, её места на уроке, в теме, в курсе.
- определение направленности задачи (профессиональная, межпредметная).
- определение вида информации для составления задачи. В учебниках и методической литературе в основном встречается только один вид - текстовый. Остальные виды используются очень редко, в то время как можно использовать все.
- определение степени самостоятельности учащихся в получении и обработке информации.
- выбор структуры задачи.
- определение формы ответа на вопрос задачи (однозначный, многовариантный, нестандартный, отсутствие ответа, ответ в виде графика).

Решение геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД требует чёткой самоорганизации: точного осознания цели, работы либо по готовому алгоритму (плану), либо по самостоятельно созданному, проверки результата действия (решения задачи), коррекции результата в случае необходимости.

В работе над решением геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД можно выделить следующие этапы::

1. понимание постановки задачи;
2. составление плана;
3. осуществление плана;

4. анализ решения.

Важным средством формирования познавательных УУД служит планомерное развитие у школьников наиболее ценных для повседневной деятельности навыков выполнения вычислений и измерений, построения и чтения графиков, составления и применения таблиц, пользование справочной литературой.

Поэтому возникает необходимость в разработке комплекса геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД.

Развитие интеллекта ученика зависит от организации процесса работы с учебными текстами, понятиями и их определениями, с теоремами, задачами школьного курса геометрии [4]. Трудности и проблемы, возникающие в обучении геометрии, связаны с недостаточным умением переходить от одного способа представления информации, к другому. Поэтому важно сформировать у учащихся такие познавательные УУД, которые обеспечивают выполнение перехода от словесной формы представления учебной информации к знаково-символической, т.е. сформировать умение оперировать знаково-символическими средствами.

Преимущество знаково-символических средств, использующих буквенно-цифровую символику, обусловлено фиксированностью алфавита и существованием процедур вывода. В процессе обучения доказательствам в школьном курсе геометрии эти правила наполняются содержанием, в результате чего получаются учебные модели, основанные на логических математических моделях.

Выводы

Обучение с использованием геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД приводит к более прочному усвоению информации.

Процесс решения геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД вызывают повышенный интерес учащихся, способствуют развитию любознательности, творческой активности. Школьников захватывает сам процесс поиска путей решения задач. Они получают возможность развивать логическое и ассоциативное мышление.

Таким образом, требования к организации учебного процесса в контексте активизации познавательной деятельности, в целом должны опираться на тщательно отобранный методический материал, при этом реализовываться материал в различных формах, а также с помощью современных методов и приемов, подробно рассмотренных в следующем параграфе.

ГЛАВА II МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УУД У ОБУЧАЮЩИХСЯ КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ.

2.1 Требования к отбору геометрических задач для формирования познавательных УУД .

Для создания благоприятных условий при решении геометрических задач, способствующих развитию познавательных УУД обучающихся, необходимо выделить особенности этих задач и отобрать те методы решения, которые соответствуют психолого-педагогической характеристике данной возрастной группы учащихся.

Стимулированию активности школьника могут способствовать такие процессы, как во-первых, логика, стройность теории предмета; второе – возможность экспериментального обоснования научных положений и технических приложений; третье – возможная парадоксальность знаний; четвертое – онтогенезис науки, т. е. экскурсы в историю науки; пятое – интерпретация современных природных явлений в современном мире.

Современное содержание школьного образования после методической обработки сохранило содержание науки, а значит, имеет те же объекты исследования, изучения, которые могут стать средствами активизации, но уже обучения.

«Индикатором» интереса, любопытства учащихся на предъявленный отрезок содержания предмета выступает психологический фактор. В основе «индикатора» лежат эмоции как чувствительные элементы внешнего воздействия, передающие его энергию «вовнутрь» субъекта, зарождая активность личности школьника к преобразующей деятельности. Благодаря этому фактору происходит естественный отбор, внешне просматриваемый, средств стимуляции из содержания предмета, которые еще не прошли методической «обработки». Методическая «обработка», или методическая «адаптация», рассматривается как «фильтрация» материала через педагогические признаки, стимулирующие методы обучения и занимательные организационные формы с целью получения средств активизации деятельности учащихся при обучении предмету. Такие средства активизации следует называть искусственными [4].

Основываясь на положениях, сформулированных в первой главе можно говорить о том, что использование геометрических задач для формирования познавательных УУД у обучающихся наиболее эффективно если эти задачи удовлетворяют следующим *требованиям:*

- текст задачи не должен указывать на способы и средства ее решения;
- проблема или ситуация должны быть адаптированы к возрастным и психологическим особенностям школьника, мотивировать его познавательный интерес;
- в содержании геометрических задач для формирования познавательных УУД у обучающихся 7-х классов должны отражаться математические и нематематические проблемы и их взаимная связь;
- задачи должны соответствовать программе курса, вводиться в процесс обучения как необходимый компонент, служить формированию предметных знаний у обучающихся 7-х классов

Деятельность учащихся по решению геометрических задач можно организовать так, чтобы целенаправленно формировались познавательные логические УУД. В то же время наиболее широкими возможностями в этом плане обладают задачи повышенной сложности.

Сложность может быть обусловлена:

- большим, по сравнению с типичными задачами, количеством действий по ее решению;
- нетипичными изложением условия или постановкой вопроса, которые требуют от учащихся переформулировки для решения задачи;
- необходимостью комбинации различных способов решения (например, сочетания графического и арифметического способов);

– необходимостью использования других (внешних или внутренних) источников данных для решения задачи.

Трудность задачи может быть обусловлена:

– неизвестностью для ученика способа решения задачи и необходимостью осуществить его поиск;

– необходимостью осуществить более глубокий анализ содержания задачи, чем обычно (при решении типичных задач);

– необходимостью выполнения прогнозирования, задействования критического мышления и т.п., то есть тех действий, которые при решении типичных задач не используются.

Таким образом, опираясь на вышеизложенное, можно сделать ряд важных выводов:

При работе над задачей формируются следующие познавательные универсальные учебные действия:

- анализ;
- структурирование информации ;
- определение способов решения задачи;
- сравнение;
- обобщение;
- перевод из одной знаковой системы в другую (из числового выражения в буквенное),
- применение модели для получения информации,
- установление причинно-следственных связей,
- формулирование проблемы и поиск решения.

В сфере познавательных универсальных учебных действий обучающиеся научатся воспринимать и анализировать сообщения и важнейшие их компоненты – тексты и чертежи, использовать знаково-символические средства, в том числе овладеют действием моделирования, а также широким спектром логических действий и операций, включая общие приёмы решения задач.

Таким образом, формируя познавательные УУД учитель осуществляет развитие компетентностей личности обучающихся и готовит их к успешной жизни в современном обществе, что соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования.

2.2.Разработка комплекса геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся 7-х классов.

Геометрические задачи неотъемлемая составляющая школьного курса математики, поэтому наличие их в контрольно-измерительных материалах государственной итоговой аттестации оправдано и необходимо для оценки математической компетентности выпускников. Поэтому учителю необходимо научить учащихся их решать и отбирать геометрические задачи, направленные на формирование познавательных УУД обучающихся 7-х классов с требованиями.

В данном пункте представлена совокупность геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся 7-х класс ов в процессе их решения. Данные задачи отвечают выделенным требованиям с учетом познавательных особенностей детей данной возрастной группы.

Комплекс задач— это набор задач, который:

-имеет одинаковую основу;

- имеет последовательность, при которой каждая следующая задача обогащала бы опыт предыдущей;

- сформулирован таким образом, чтобы осуществлялся переход от одной задачи к другой.

Основой комплекса может быть:

- единая геометрическая конструкция;
- метод решения;
- единая тематика;
- теорема;
- ключевая задача;
- дополнительное построение и др..

При решении комплекса геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД ученик получает условия не классических, а «открытых» задач, в ходе решений которых необходимо проводить те или иные исследования. Находить общее и различия, сравнивать, выдвигать гипотезу, проводить строгое доказательство, помогать другим ученикам, если у них возникли затруднения.

Так как геометрические задачи имеют определенную специфику, и их условие не сформулировано в явном виде, то этапы решения текстовых математических задач необходимо дополнить. То есть добавить пункты, которые отражают специфику решения данного вида задач. Таким образом, получим следующие этапы решения геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД:

анализ содержания текста задачи;

1) перевод условия задачи на язык математической теории, подходящей для ее решения и построение математической модели задачи;
2) составление плана решения;
3) решение задачи в рамках математической модели;
4) проверка и анализ решения задачи.

Понимание учащимися выделенных этапов и правильная их реализация является главным условием формирования учебных действий входящих в перечень познавательных УУД.

Контроль за усвоением полученных знаний и способов действий.	Обеспечить восприятие, осмысление, запоминание и применение детьми изученного материала. Выявление пробелов осмысления изученного материала, коррекция выявленных пробелов, обеспечение закрепления в	Дает задание для учащихся, организует обсуждение результатов выполнения. Запись на доске: 1. Параллельные прямые а и в пересечены непараллельными прямыми с и d. Обозначены углы 100° и 49°. Найдите углы 1,2,3,4. 2.Задачи на нахождение площади параллелограмма, треугольника,	Выходят по одному к доске, пишут ответ и объясняют. Различают фигуры, выбирают формулы, способы решения задач.	Познавательные УУД: решение проблемы, построение логической цепи рассуждений; умения по использованию математических знаний для решения математических задач и оценки полученных результатов,

	памяти детей знаний и способов действий, которые им необходимы для выполнения контрольной работы по геометрическому материалу.	прямоугольника. 3. Самостоятельная работа в парах: с.109 № 7, № 8 (обсудить одну из задач).	Решают задачи на нахождение площади. Вычисляют углы, противоположные стороны параллелограмма. Самостоятельно решают в тетради. Самопроверка.	использование доказательной математической речи..

Рассмотрим, какие познавательные универсальные учебные действия формируются на каждом этапе решения геометрической задачи.

Первый этап решения задачи – анализ условия. В начале обучения учащихся решению необходимо раскрыть понятие задачи, сформировать навыки выделения основных её частей (условие и вопрос) и находить связь между ними. Для этого необходимо предложить учащимся следующие задания:

- нахождение частей в задачах различающиеся по характеру формулировки условия и месту расположения в них вопроса;
- формулировка и нахождение частей в задачах сконструированные различным образом, то есть с помощью рисунка, таблицы или схемы;
- превращение текстов в задачи;
- сформулировать или подобрать условие задачи, если дан конкретный вопрос.

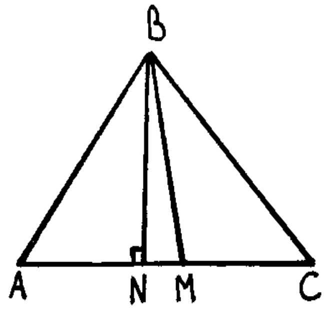
Умение выделять в тексте задачи её части составляет необходимый исходный уровень по отношению к анализу задачи.

Этапы решения геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД имеют особенности в зависимости от метода их решения.

Метод опорных задач

Под методом опорных задач понимают такие задачи, когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем и задач. Такие задачи надо не только уметь решать, но и знать, и уметь применять содержащиеся в них факты к решению других задач. К таким задачам относятся и теоремы, из первой главы. Приведем их доказательство.

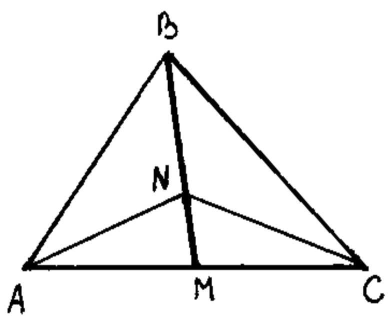
Задача №1. *Доказать, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих.*



Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Проведём в нём медиану BM. Треугольник разбился медианой на два треугольникаABM и CBM, имеющих равные основания AM и CM. Так как у этих треугольников общая высота BN, то $S_{ABM} = ½AM \times BN = ½CM \times BN = S_{CBM.}$

Что и требовалось доказать.

Задача№ 2. *Точку пересечения медиан треугольника соединили с его вершинами. Доказать, что площади образовавшихся треугольников равны.*



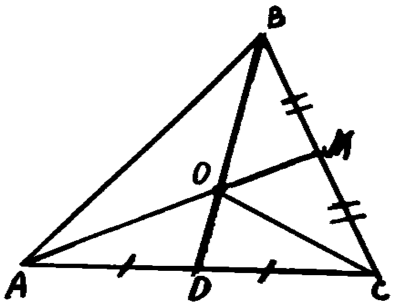
*Доказательство:*Пусть N - точка пересечения медиан треугольника ABC , M – середина стороны AC. Тогда MN – медиана треугольника ANC и треугольники ANM и CNM равновелики (смотри задачу №1). Поскольку BM - медиана треугольника ABC , то равновелики и треугольники ABM и CBM. Следовательно, площади треугольников ABN и CBN равны. Аналогично доказывается , что равны площади треугольников ABN и CAN . Из сказанного следует , что равны площади треугольников $S_{ABN}=S_{BCN}=S_{ACN}$. <u>*Что и требовалось доказать*</u>.

Познавательные УУД:

- *анализ текста задачи;*
- *определение способов решения задачи;*
- *перевод из одной знаковой системы в другую.*

Задача3. *Доказать что медианы треугольника, пересекаясь делят его на шесть равновеликих треугольников.*

<u>*Доказательство:*</u>



Для доказательства этого факта воспользуемся уже доказанными в задачах №1 и №2 фактами: $S_{BOC} = ⅓\ S_{ABC}$, $S_{OMB} = S_{OMC} = ½\ S_{BOC}$, из чего и следует, что

$S_{OMB} = S_{OMC} = 1/6\ S_{ABC}$,

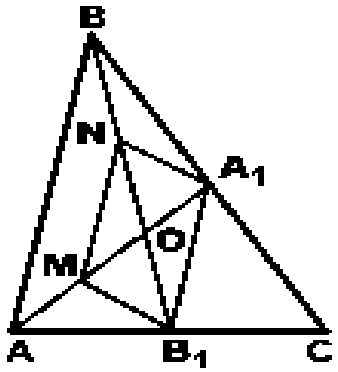
<u>*что и требовалось доказать*</u>.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- поиск и выделение необходимой информации;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели,строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи.

Задача 4. *Доказать, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2:1.*

Доказательство:



1) Пусть дан Δ ABC, AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника,

M — середина отрезка AO, N — середина BO (то есть AM=OM, BN=ON).

2) Соединим точки M, N, A_1 и B_1 отрезками. Тогда MN — средняя линия треугольника AOB и $MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2}AB.$

3) Так как AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC, точка A_1- середина отрезка BC, B_1 — середина AC. Следовательно, A_1B_1 — средняя линия треугольника ABC и $A_1B_1 \parallel AB, A_1B_1 = \frac{1}{2}AB.$

4) Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel AB, MN = \frac{1}{2}AB \\ A_1B_1 \parallel AB, A_1B_1 = \frac{1}{2}AB \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel A_1B_1, MN = A_1B_1$$

Значит, четырёхугольник MNA_1B_1 — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

По свойству диагоналей параллелограмма $ON = OB_1, OM = OA_1.$

Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} AM = OM, BN = ON \\ ON = OB_1, OM = OA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$AM = OM = OA_1$, $BN = ON = OB_1,$

из чего следует, что $AO : OA_1 = BO : OB_1 = 2 : 1.$

5) Докажем теперь, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке (методом от противного).

Предположим, что третья медиана CC_1 треугольника ABC пересекает медианы AA_1 и BB_1 в некоторой точке, отличной от точки О.

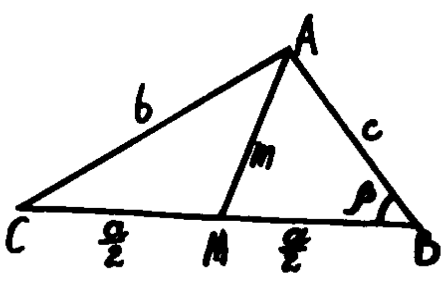
Тогда на каждой медиане есть две различные точки, делящие её в отношении 2:1, считая от вершины. Пришли к противоречию.

Таким образом, $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1.$

Что и требовалось доказать.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- выбор способа достижения поставленной цели;
- умение выделять главное.



Задача 5. *Вывести формулу длины медианы треугольника через длины его сторон* $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

Решение.

Пусть стороны треугольника равны $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, и пусть AM - медиана, проведенная к стороне BC. Чтобы найти ее длину, заметим, что по теореме косинусов для треугольника ABM имеем

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos\beta} =$$

$$= \sqrt{c^2 + \frac{a^2}{4} - ac\cos\beta}.$$

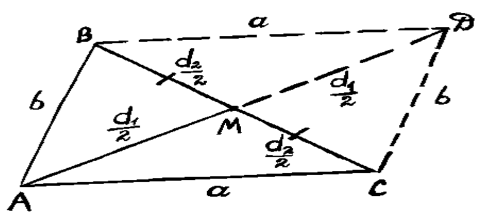
С другой стороны, по теореме косинусов уже для всего треугольника ABC имеем:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получим (после упрощений) вот что:

В треугольнике со сторонами a, b и c длина медианы, проведенной к стороне a, равна $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Аналогично получают и формулы медиан, проведенных к двум другим сторонам.

Любопытно, что у этой задачи есть и другой, ещё более простой способ решения.



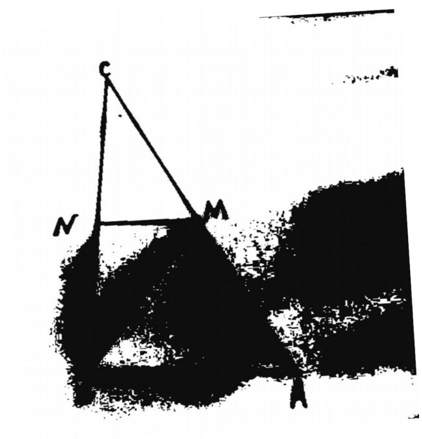
Надо достроить треугольник до параллелограмма, и воспользоваться тем, что в параллелограмме сумма квадратов длин его всех сторон равна сумме квадратов его диагоналей.

<u>*Ответ:*</u>
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Познавательные УУД:

- анализтекстазадачи,
- умениевыделятьглавноле,
- перевод из одной знаковой системы в другую

Задача 6. *Доказать, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.*



Доказательство.

Пусть точка M – середина гипотенузы CA. Проведем$MN \parallel$AB. Тогда по теореме Фалеса CN=BN. Значит MN – средняя линия треугольника ABC MN=½AB, BN=½CB . Из прямоугольного треугольника MNB имеем BM= $\sqrt{BM^2+NM^2}$ = $\sqrt{\frac{1}{4}CB^2+\frac{1}{4}AB^2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{CB^2+AB^2}$ = $\frac{1}{2}CA$.

Кроме того, так как MB=MA=MC, то точка M – центр окружности описанной около прямоугольного треугольника ABC. Значит,

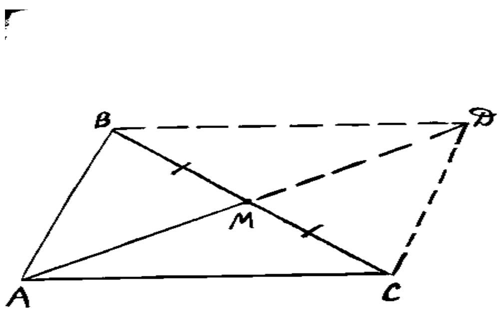
1) *Центром окружности описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.*

2) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.

Как мы убедились даже эти самые первые задачи – теоремы темы в своем решении опираются либо на предыдущие из данной темы , либо на теоремы, которые нам уже известны.

На знании таких опорных задач, базируется решение многих других.

Например, Задача 7. *В треугольнике ABC AB=4, BC=5, AC=6. Найти длину медианы AM.*



Решение.

1 способ. Продлим медиану AM. На её длину, тогда ABCD – параллелограмм (по признаку параллелограмма, так как его диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам). По свойству параллелограмма

$AD^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$, т.е. $(2AM)^2=$

$=2*4^2+2*6^2-5^2=79$, AM= $\frac{\sqrt{79}}{2}$.

2 способ. Воспользуемся формулой $m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}=$

$\frac{\sqrt{2*4^2+2*6^2-5^2}}{2}=\frac{\sqrt{79}}{2}$.

3 способ. Воспользуемся теоремой косинусов для угла B треугольника ABC:

$\cos\angle B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB*BC}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2*4*6}=\frac{1}{8}$.

В треугольнике ABM имеем: AM= $\sqrt{AB^2+BM^2-2*AB*BM*\cos\angle B}=$

$\frac{\sqrt{79}}{2}$.

<u>*Ответ*:</u> $\frac{\sqrt{79}}{2}$.

Задача 8. *В треугольнике ABC AB=8* $\sqrt{3}$ *; BC=24;* $\angle$ *ABC=30* ^{0} . *Найти медиану AM.*

<u>*Решение.*</u> Рассмотрим Δ ABM. AB=8 $\sqrt{3}$; BM=12, $\angle$ ABM=30 ^{0} .

По теореме косинусов имеем: $AM^2+BM^2-2AB*BM*\cos30^0=192+144-2*8\sqrt{3}$

$*12*\frac{\sqrt{3}}{2}=$

=48. Следовательно, AM= $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

<u>*Ответ*:</u> $4\sqrt{3}$.

Познавательные УУД:

- самостоятельное выделение и формирование познавательной цели,

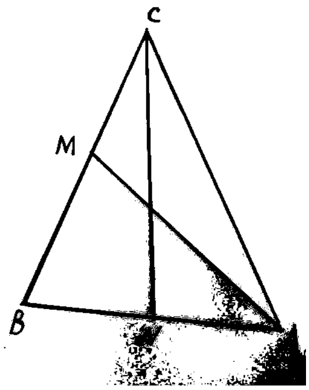
- анализ текста задачи,
- установление причинно-следственных связей.

Поэтапно-вычислительный метод

Данный метод заключается в том, что задача разбивается на ряд подзадач, каждая из которых является либо элементарной, либо опорной, поэтапное решение этих подзадач и приводит к решению данной задачи.

Поэтапно-вычислительным методом решены следующие задачи..Для их решения использовали в основном формулы медиан и теорему косинусов.

Задача 9.*Одна из сторон треугольника равна 14, а медианы, проведенные к двум другим сторонам равны* $3\sqrt{7}$ *и* $6\sqrt{7}$ *. Найти эти стороны.*



<u>*Решение.*</u> Пусть в Δ ABC AC=14, AM и CN – медианы, AM= $3\sqrt{7}$, CN= $6\sqrt{7}$, тогда по теореме косинусов

$$\cos\angle AOC = \frac{AO^2+OC^2-AC^2}{2\,AO*OC} = \frac{28+112-196}{112} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\angle$ AOC=120^0 и $\angle$ AON= $\angle$ COM=60^0.

В треугольнике AON

$$AN=\sqrt{AO^2+ON^2-2\,AO*ON*\cos 60^0}=\sqrt{28+28-2*28*\frac{1}{2}}=2\sqrt{7},$$

Следовательно, AB= 2AN=4 $\sqrt{7}$.

В треугольнике MOC

МС= $\sqrt{MO^2+OC^2-2MO*OC*\cos 60^0}$ = $\sqrt{7+112-2*28*\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{91}$,

значит ВС=2 $\sqrt{91}$.

<u>*Ответ:*</u> 4 $\sqrt{7}$; 2 $\sqrt{91}$.

Задача 10.*В треугольнике АВС заданы медианы m_a, m_bи m_c. Найти стороны треугольника.*

<u>*Решение.*</u> Обозначим стороны треугольника АВ=с, АС=в, ВС=а. Тогда, используя формулы медиан, получим систему уравнений

$$4m_a=2b^2+2c^2-a^2,$$
$$4m_b=2a^2+2c^2-b^2,$$
$$4m_c=2a^2+2b^2-c^2.$$

.

|¿ |¿¿¿ ¿ ¿

Складывая все уравнения системы, получим:

4(m_a + m_b+ m_c) = 3a^2 +3b^2 + 3c^2, или $\frac{8}{3}$ (m_a + m_b+ m_c) = 2a^2 +2b^2 + 2c^2.

Вычитая из полученного равенства последовательно первое, затем второе и третье уравнения системы, найдем, что

$$9a^2=8m_b^2+8m_c^2-4m_a^2,$$
$$9b^2=8m_a^2+8m_c^2-4m_b^2,$$
$$9c^2=8m_a^2+8m_b^2-4m_c^2.$$

Отсюда, получаем формулы для вычисления сторон треугольника через его медианы.

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2},$$
$$b=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_c^2-m_b^2},$$
<u>*Ответ:*</u>
$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2+2m_b^2-m_c^2}.$$

Зная, эти формулы можно по любым данным их вычислить. Причем можно и не запоминать формулы, а запомнить, как их выводят, и поэтапно вычислить значения длин сторон треугольника.

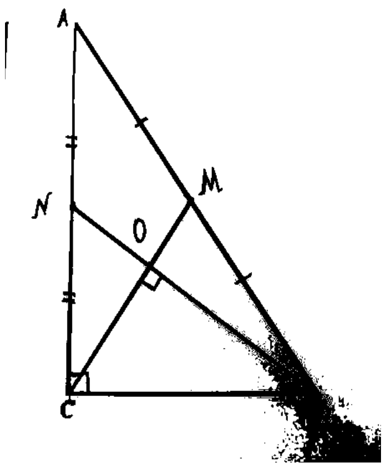
Познавательные УУД:

- *анализ, обобщение, развитие, расширение.*
- *организацияпоисковой, познавательнойдеятельностиучащихся*

Алгебраический метод решения

Под алгебраическим методом понимают метод составления уравнения или системы уравнений, в которые входят данные и искомые величины. Этот метод является одним из наиболее распространенных при решении прямоугольных треугольников.

Задача 11. *Медианы CM и BN прямоугольного треугольника ABC (∠ C= 90⁰), перпендикулярны. Найти катеты, если гипотенуза равна с.*



Решение. MA=MC=MB = $\frac{c}{2}$. Пусть DN=*x*. Тогда BO= $\frac{2}{3}x$, MO= $\frac{c}{6}$.

$MB^2 = MO^2 + BO^2$; $\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{36}+\frac{4}{9}x^2$; $x^2=\frac{c^2}{2}$;

$BO^2=\frac{2c^2}{9}$.

$$BC^2=CO^2+BO^2=\frac{c^2}{9}+\frac{2c^2}{9}=\frac{3c^2}{9}; \quad BC=\frac{c\sqrt{3}}{3}.$$

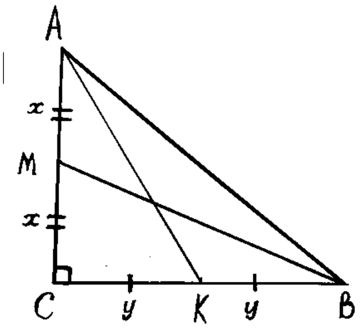
$$AC^2=AB^2-BC^2=c^2-\frac{c^2}{3}=\frac{2c^2}{3}; \quad AC=\frac{c\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{c\sqrt{3}}{3};\frac{c\sqrt{6}}{3}$.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- умение делать выводы,
- умение представлять информацию в виде схем.

Задача 12. *В прямоугольном треугольнике медианы.*



Проведенные к катетам равны $\sqrt{52}$ *и.* $\sqrt{73}$ *Найти длину гипотенузы.*

<u>Решение.</u>

Проведем медианы АК и ВМ.

Пусть АК= $\sqrt{52}$, $BM=$ $\sqrt{73}$, x – половина длины стороны АС, y – половина длины стороны ВС. Тогда из прямоугольных треугольников АСК и ВСМ имеем: $AK^2=AC^2+CK^2$, $BM^2=MC^2+BC^2$, тогда составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=52, \\ x^2+4y^2=73. \end{cases}$$

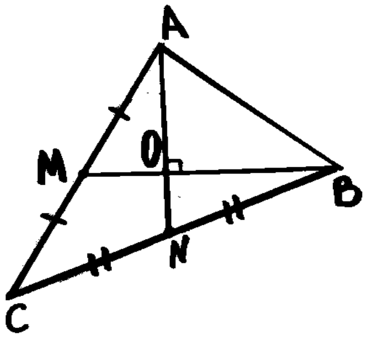
отсюда $5(x^2+y^2)=125,$ $x^2+y^2=25,$ $AB^2=4(x^2+y^2),$ АВ=10.

<u>*Ответ:*</u> 10.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- постановка и формулирование проблемы,
- выбор наиболее эффективных способов решения задач

Задача 13. *Две стороны треугольника равны 6см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, пересекаются под прямым углом. Найти третью сторону треугольника.*



Решение. Пусть AC=6см, BC=8см и медианы AN и BM пересекаются в точке O.AN ¿ BM. Пусть AN=x см, BM=y см. Тогда AO= $\frac{2}{3}x$, NO= $\frac{1}{3}x$, BO= $\frac{2}{3}y$, MO= $\frac{1}{3}y$.

$AM^2=OM^2 + OA^2$, $BN^2= OB^2+ON^2$. $9=\frac{1}{9}y^2+\frac{4}{9}x^2$ alignl ¿¿¿ ¿ $16=\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{9}y^2;$ ¿ ¿ {, ¿¿¿ ¿ ¿ $4x^2+y^2=81,$ $x^2+4y^2=144;$ ¿ {¿¿¿ ¿

$5x^2+5y^2=225;$ $x^2+y^2=45;$ $AB^2=BO^2+AO^2 = \frac{4}{9}$ (x^2+y^2)=20, то AB= $2\sqrt{5}$ см.

Ответ: $2\sqrt{5}$ см.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- формулирование проблемы,
- делать предварительный анализ способов решения задачи.

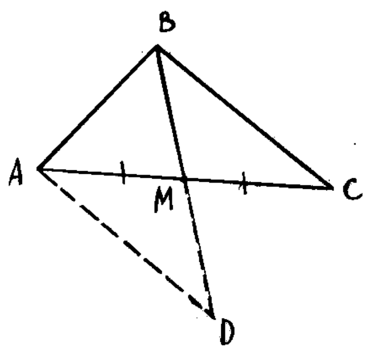
Геометрические методы

К таким методам решения задач относят методы , использующие дополнительные построения, которые позволяют существенно упростить решение задачи.Это, например такие дополнительные построения, как

- проведение прямой через две данные точки,
- проведение через заданную точку прямой, параллельно данной, либо перпендикулярной данной
- симметричные построения, поворот и т.д.

- решая задачу о медианах, бывает полезным продлить медиану на ее же длину.

Задача 14. *Найти площадь треугольника по двум сторонам, равным 6 и 8, и медиане, равной 5, проведенной к третьей стороне.*



Решение. Пусть в треугольнике ABC AB=6, BC=8, AM=MC, BM=5.

Продлим медиану BM так, чтобы MD=BM, и соединим точки A и D.

$\Delta AMD = \Delta CMB$ по первому признаку равенства треугольников, так как $AM = MC, BM = MD, \angle AMD = \angle CMB$. Из равенства треугольников AD=BC=8.

В треугольнике ABD AB=6, AD=8, BD=10, следовательно, $\angle BAD = 90^0$ (треугольник египетский), кроме того,

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{1}{2} AB * BD = 24$$.

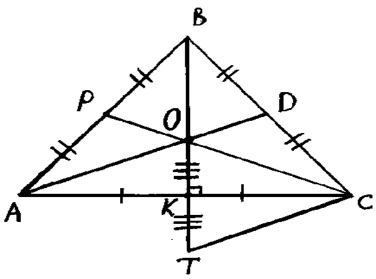
Ответ: 24.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- умение выделять главноле,
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели,строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи

Задача 15. *Медианы треугольника равны 5, 6 и 5. Вычислить площадь этого треугольника.*

Решение.



Пусть AD, CP, BK – медианы ΔABC и AD= CP=5,BK=6. Отложим отрезок KT, равный отрезку OK, и соединим точки C и T. AO=OC= $\frac{10}{3}$,

OK=KT=2. KC= $\sqrt{\frac{100}{9}-4}=\frac{8}{3}$.

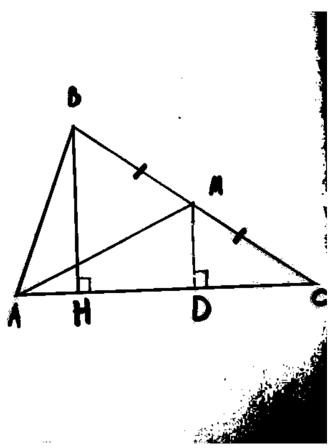
$S_{OTC}=\frac{1}{2}OT*KC=\frac{16}{3}$. $S_{OKC}=\frac{8}{3}$. Тогда воспользовавшись тем, что медианы пересекаясь делят треугольник на шесть равновеликих, получим: .

$S_{ABC}=\frac{8}{3}*6=16$.

Ответ: 16.

Познавательные УУД:

- осмысление текста задачи;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели, строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи;
- умение выделять главное, сравнивать, различать и обобщать.



Задача 16. *В треугольнике ABC* $AB=\sqrt{41}$, *BC=13, BH – высота, опущенная на сторону AC, BH=5. Найти длину медианы AM.*

Решение.

В прямоугольном треугольнике BHC по теореме Пифагора

$HC=\sqrt{BC^2-BH^2}=12.$

В прямоугольном треугольнике ABH по теореме Пифагора $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=4.$

Опустим из точки M перпендикулярMD на сторону AC. MD – средняя линия треугольника BHC, следовательно $MD=\frac{1}{2}BH=\frac{5}{2}$, $HD=DC=\frac{1}{2}HC=6.$

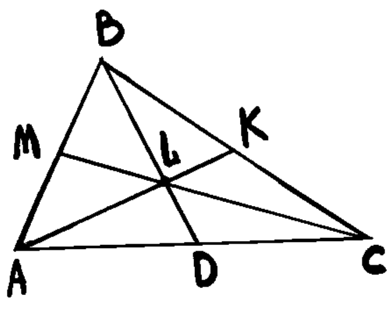
Тогда в прямоугольном треугольнике AMD $\angle AMD=90^0, AD=AH+HD=4+6=10,$ $MD=\frac{5}{2}$. По теореме Пифагора

$$AM=\sqrt{AD^2+MD^2}=\sqrt{100+\frac{25}{4}}=\frac{5\sqrt{17}}{2}.$$

<u>*Ответ:*</u> $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

<u>Метод площадей</u> предполагает использование свойств площадей к решению задач. Такие задачи, как правило не имеют универсального способа их решения. При поиске решения здесь приходится проявлять в полной мере и геометрическое видение, и творческий подход.

А название <u>метода подобия</u> само подсказывает, что в этом случае применяют признаки подобия треугольников. Для этого надо уметь распознать на рисунке к задаче подобные треугольники по её данным.



Задача 17.*В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L.Найти площадь треугольника ABC, если площадь четырёхугольника KCDL равна 5.*

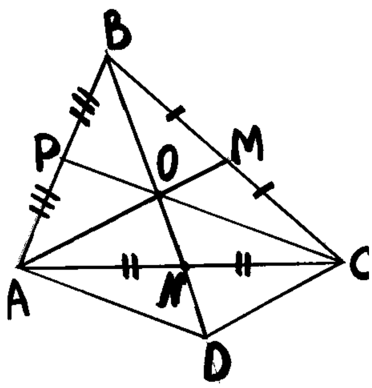
<u>*Решение.*</u>

Проведем третью медиану CM. Три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников, тогда $S_{CDL}=\frac{1}{2}S_{KCDL}=\frac{5}{2}$, $S_{ABC}=6*S_{CDL}=15$.

Ответ:15.

Познавательные УУД:

- осмысление текста задачи;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели, строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи;
- умение выделять главное, сравнивать, различать и обобщать.

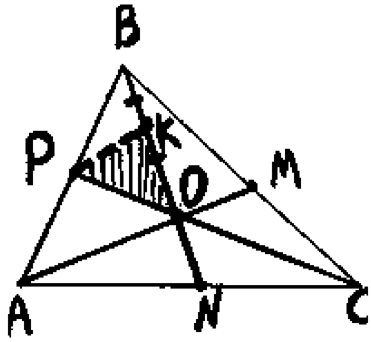


Задача 18. *Найти площадь треугольника, если его медианы равны 3см , 4см и 5см.*

Решение.

Первый способ.

Пусть AM=3см, BN=4см и CP=5см – медианы треугольника ABC. O-точка пересечения медиан. По свойству медиан каждая из них точкой O делится в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Значит, AO= $\frac{2}{3}AM$, $ON=\frac{2}{3}BN$, $CO=\frac{2}{3}CP$. В треугольнике AOC известны две стороны AO и CO и медиана ON, проведенная к третьей стороне. Площадь этого треугольника найдем следующим образом: достроим его до параллелограмма AOCD, площади треугольников AOC и AOD равны. Теперь по формуле Герона получим $S_{AOD}=\frac{8}{3}$ см^2 .Площадь треугольника ABC равна шести площадям треугольника AON или трём площадям треугольника AOC, Следовательно, $S_{ABC}=8$ см^2.



Второй способ. В этом случае проведем КР‖АМ. КР – средняя линия треугольника АОС, значит

$$KP=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}AM=\frac{1}{3}AM$$

$$OP=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}PC=\frac{1}{3}PC$$

$$OK=\frac{1}{2}BO=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}BN=\frac{1}{3}BN$$

Значит треугольник ОКР подобен треугольнику со сторонами 3см, 4см и 5см (египетскому), коэффициент подобия равен $\frac{1}{3}$.

Следовательно $S_{OPK}=\frac{1}{9}*\frac{6*4}{2}=\frac{2}{3}$.

С другой стороны $S_{OPK}=\frac{1}{2}S_{POB}=\frac{1}{2}*\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{1}{12}S_{ABC}$, тогда $S_{ABC}=12S_{OPK}=12*\frac{2}{3}=8\left(см^2\right)$

Ответ: 8 см^2.

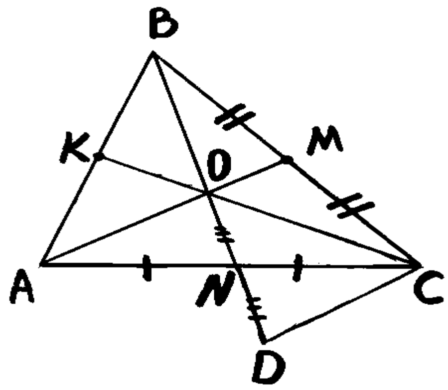
Как видим при решении задачи № 18 этими двумя способами для того, чтобы применить метод площадей сначала необходимо было выполнить дополнительное построение. Такой подход к решению используется и при решении следующей. Кроме того, при решении задачи №18 вторым способом, а также при решении задачи №19 использовался признак подобия треугольников по трём сторонам и свойство площадей подобных фигур, о том, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- поиск и выделение необходимой информации;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи

простейшие графические модели,строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи.

Задача19. *Найти площадь треугольника, сторонами которого служат медианы треугольника с площадью, равной S.*



<u>*Решение.*</u> Пусть $S_{ABC}=S$, AM, BN, KC – медианы. Продлим Медиану BN на отрезок ND,равный ON, и соединим точки D и C.

Рассмотрим треугольник DOC:

OC= $\frac{2}{3}$ KC, OD= 2 ON= 2* $\frac{1}{3}$ BN= $\frac{2}{3}$ BN, DC=AO= $\frac{2}{3}$ AM, это следует из того,что $\Delta DNC=\Delta ONA$ по двум сторонам и углу между ними. А значит ΔOCD подобен треугольнику, сторонами которого являются медианы, с коэффициентом подобия к= $\frac{2}{3}$. Обозначим площадь этого треугольника через x, тогда $S_{OCD}=\frac{4}{9}x$, отсюда $x=\frac{4}{9}S_{OCD}$.

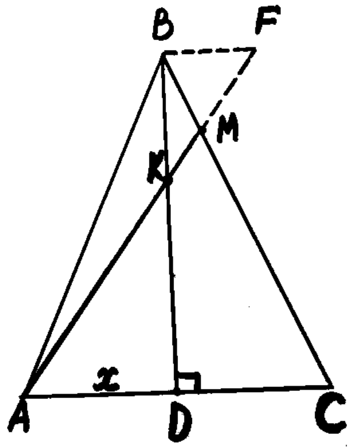
С другой стороны, $S_{OCD}=2S_{OCN}=2*\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{1}{3}S$. Значит, $x=\frac{9}{4}*\frac{1}{3}S=\frac{3}{4}S$.

<u>*Ответ:*</u> $\frac{3}{4}S$.

Результат, полученный в этой задаче, может быть полезным при решении других задач, если запомнить, что отношение площади треугольника к площади треугольника, составленного из медиан первого равно 4:3.

Задача 20. *На медиане BD равнобедренного треугольника ABC (AB=BC) взята точка K такая, что KD=2BK. Прямая AK пересекает* *сторону BC в точке M. Найти площадь треугольника AMC, если площадь треугольника ABC равна 20.*

<u>*Решение.*</u> BD – медиана треугольника ABC, проведенная к его основанию, следовательно, BD является высотой и биссектрисой.



Проведем прямую BF параллельноую AC до пересечения её с продолжением AM в точке F.

Пусть AD=DC=x, AC=2x.

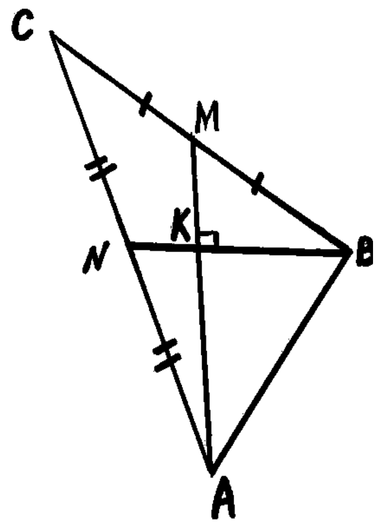
Треугольник AKDподобен треугольнику FKB по двум углам ($\angle KAD = \angle KFB, \angle AKD = \angle FKB$), следовательно $\frac{BF}{AD} = \frac{BK}{KD} = \frac{1}{2}$, отсюда $BF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} x$.

Треугольник AMC подобен треугольнику FMB ($\angle AMC = \angle FMB, \angle MAC = \angle MFB$), поэтому $\frac{BM}{MC} = \frac{BF}{AC} = \frac{\frac{1}{2}x}{2x} = \frac{1}{4}$, а $\frac{MC}{BC} = \frac{4}{5}$.

Треугольники ABC и AMC имеют одинаковую высоту, проведенную из вершины A. Следовательно их площади относятся также, как стороны к которым эта высота проведена,

т.е. $\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{4}{5}$, отсюда получим, что $S_{AMC} = \frac{4}{5} S_{ABC} = \frac{4}{5} * 20 = 16$.

<u>*Ответ*</u>:16.



Задача 21. *В треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна медиане BN. Найти площадь треугольника ABC, если AM=m, BN=n.*

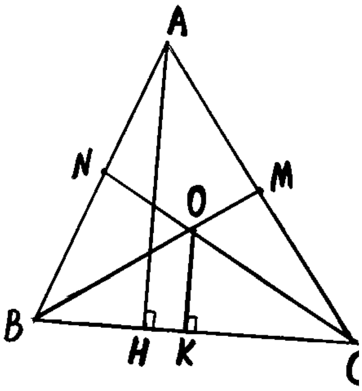
Решение. Пусть медианы пересекаются в точке К. Тогда $AK=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}m$; $BK=\frac{2}{3}BN=\frac{2}{3}n$.

$$S_{AKB}=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}m*\frac{2}{3}n=\frac{2}{9}mn$$.

$$S_{ABC}=3*S_{AKB}=3*\frac{2}{9}mn=\frac{2}{3}mn$$.

Ответ: $\frac{2}{3}mn$.

Задача 22. *В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM,CN и высоты AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найти площадь треугольника.*



Решение. В треугольнике BOC $BO=\frac{2}{3}BM=\frac{8}{3}$, $CO=\frac{2}{3}CN=\frac{10}{3}$.

Кроме того $S_{BOC}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ и у треугольников ABC и BOC общая сторона BC. Следовательно, $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OK}{OH}=\frac{1}{3}$, тогда $OK=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}*6=2$.

В прямоугольном треугольнике OKC по теореме Пифагора $KC=\sqrt{OC^2-OK^2}=\sqrt{\frac{100}{9}-4}=\frac{8}{3}$,

а в прямоугольном треугольнике BOK $BK=\sqrt{BO^2-OK^2}=\sqrt{\frac{64}{9}-4}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Тогда BC= BK+KC= $\frac{8+2\sqrt{7}}{3}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH*BC=\frac{1}{2}*6*\frac{8+2\sqrt{7}}{3}=2(\sqrt{7}+4)$$.

Ответ: $2(\sqrt{7}+4)$.

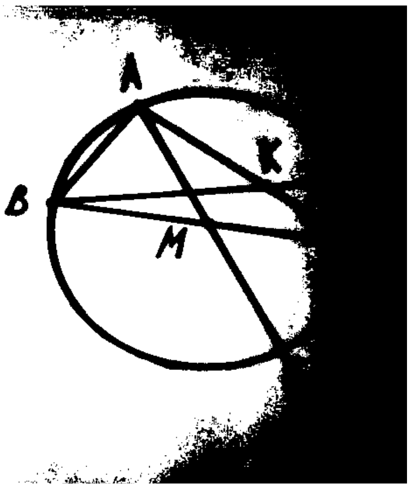
Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- поиск и выделение необходимой информации;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели,строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи.

Метод вспомогательного элемента

Иногда при решении геометрических задач надо ввести вспомогательный отрезок или угол. Тогда величину этого отрезка или угла полагают равной, например, *x* и затем находят искомую величину. В процессе вычислений вспомогательная величина, как правило, сокращается, поэтому данный метод близок к алгебраическому методу.

Задача 23. *Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем AE:AM=2:1. Найти углы треугольника ABC.*



Решение. Обозначим стороны треугольника ABC: AB=c, AC=b, BC=a, а медианы соответственно AM=m_a, BK=m_b.

Воспользуемся свойством пересекающихся хорд в окружности:

AM*ME=BM*MC, m_a*m_b= $\frac{a}{2}*\frac{a}{2}$, а так как AE=2AM, то AM=ME и $4m_{a^2}=a^2$.

Далее, используя формулу для вычисления длины медианы, получим, что $2b^2+2c^2-a^2=a^2$, отсюда $a^2=b^2+c^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC прямоугольный, $\angle A=90^0$.

Так, как $BF=\frac{2}{3}BK$, то $KF=\frac{1}{2}BK$. Снова, применяя свойство хорд в окружности, получаем

$BK*KF=AK*KC$, или $m_b*\frac{1}{2}m_b=\frac{b}{2}*\frac{b}{2}$, отсюда $b^2=2m_b^2$.

Применяя формулу медианы, получим, $b^2=\frac{1}{2}(2a^2+2c^2-b^2)$.

Отсюда $2a^2+2c^2=3b^2$. Теперь, учитывая теорему Пифагора, получаем

равенство: $2b^2+2c^2+2c^2=3b^2$, то $4c^2=b^2$, а значит $\frac{b}{c}=2$.

Тогда $tg\angle B=2$, а $\angle B=arctg2$.

Наконец, $\angle C=\frac{\pi}{2}-arctg2$.

Ответ: $\angle A=90^0$; $\angle B=arctg2$; $\angle C=\frac{\pi}{2}-arctg2$.

Познавательные УУД:

- анализ текста задачи,
- поиск и выделение необходимой информации;
- анализ и преобразование информации, используя при решении задачи простейшие графические модели,строя и преобразовывая их в соответствии с содержанием задачи.

На этапах восприятия и осмысления нового материала решение задачи имеет цель побудить у учащихся потребность в расширении знаний, повысить познавательный интерес и научить их методам самостоятельного приобретения знаний.

Решая задачи на этапах закрепления и повторения учебного материала, учащиеся видят примеры, из окружающей действительности позволяющие раскрывать практическую значимость математики, широкую область ее применения. Эти задачи должны быть убедительными и доступными понимаю школьников. Таким образом, при иллюстрации учебного материала учащиеся овладевают способами применения знаний на практике и вместе с тем прочнее и глубже усваивают его содержание.

К упражнениям, предназначенным для закрепления и углубления знаний обучаемых, целесообразно вводить практико-ориентированные задачи с недостающими числовыми данными. Что создает условие для формирования у учащихся умений: выполнять измерения, ориентироваться и находить необходимую информацию в таблицах или справочниках. Данные действия так же влияют на формирование познавательных универсальных учебных действий у учащихся.

Немаловажно также привлекать школьников к самостоятельному поиску или составлению примеров применения полученных математических знаний в известных им жизненных явлениях.

Выполнение упражнений, связанных с выделением на реальных предметах, их моделях или чертежах знакомых геометрических форм имеет большую познавательную ценность. Значимость подобных упражнений в том, что большинство деталей машин или механизмов представляет собой совокупность различных геометрических фигур, и учащимся необходимо уметь выделять на них знакомые формы. Такая работа способствует развитию пространственных представлений, а так же у учащихся формируются такие познавательные УУД как анализ, классификация, сравнение, входящие в группу логических действий.

Ребята учатся извлекать информацию с целью чтения (познавательные УУД), выбирать эффективные способы решения задач в зависимости от конкретных условий.

Большое внимание уделяется формированию логических действий:

- анализ объекта для выделения свойств и признаков объектов (выделение существенных и несущественных признаков);
- синтез как составление целого из частей, в том числе с восполнением недостающих компонентов;

- выбор оснований и критериев для сравнения, классификации, объектов по выделенным признакам;
- подведение под понятия, выведение следствий;
- установление причинно-следственных связей;
- построение логической цепи рассуждения;
- выдвижение гипотез и их обоснование;
- самостоятельное создание способов решения проблем творческого характера и поискового характера;
- доказательство;
- использовать поиск необходимой информации для выполнения заданий с использованием учебной и научной литературы;
- проводить сравнение;
- проводить классификацию по заданным критериям;
- ориентироваться на разнообразие способов решения задач.

На уроках математики необходимо учить школьников сравнивать, находить общее и различия, составлять математическую модель к задачам, выдвигать гипотезу и уметь проводить строгое доказательство.

Выводы

Таким образом, можно увидеть, что выделенные умения, необходимые в жизни формируются на всех этапах решения геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД. Указанные результаты обучения формируются в основной школе в 5-9-ых классах, а овладение более сложными математическими методами происходит в старшей школе.

Рассмотренные в этом пункте вопросы, связанные с созданием комплекса геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся позволяют сделать следующие выводы:

- геометрические задачи являются средством формирования познавательных универсальных учебных действий, так как при решении задач учащиеся овладеют общими приемами их решения, а также овладеют разнообразием способов решения.

- с помощью геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся формируется: навык использования знаково-символических средств, в том числе моделей и схем для решения; умение устанавливать причинно-следственные связи.

- обучение с использованием геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся приводит к более прочному усвоению учебного материала, так как возникают ассоциации с конкретными действиями и событиями..

Таким образом, систематическая работа учителя по решению с учащимися геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся, отработка каждого из этапов их решения, и использование их на различных этапах урока с разной дидактической целью способствует формированию познавательных универсальных учебных действий у учащихся в процессе обучения математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время знание математики – это не только атрибут культурного развития человека, но и условие его успешной карьеры. В современные изменения общественных, социокультурных условий находят свое отражение в учебно-воспитательном процессе, что предполагает формирование личности способной неординарно мыслить, творчески решать поставленные задачи.

Согласно новым требованиям государственного стандарта образования в Российской Федерации одним из ведущих приоритетов является коммуникативная направленность учебного процесса. Это является значимым, так как формирование личности способной к организации межличностного взаимодействия, решению коммуникативных задач обеспечивает успешную ее адаптацию в современном социокультурном пространстве.

Согласно документам ФГОС ООО главная задача – формирование универсальных учебных действий, ключевых компетенций; формирование и совершенствование коммуникативной компетенции; расширение и систематизация знаний математики, расширение лингвистического кругозора. Но с другой стороны закон должен создать оптимальные условия для

Для ученика важны умения (сформированные познавательные УУД), связанные с построением (этап преобразования учебной информации) и использованием учебных моделей (этап применения усвоенной учебной информации знаний). Для их формирования разработаны адекватные изучаемому геометрическому содержанию приёмы и учебные задачи, результатом использования которых при определённом способе преобразования, является та или иная учебная модель, выполняющая на этапе применения знаний различные функции [11].

Рассмотренные познавательные общеучебные УУД, тесно связаны с познавательными логическими УУД, которые отражают общие способы интеллектуальной деятельности, характерные для математики. К ним относятся: сравнение; подведение под понятие; анализ и синтез; выведение следствий; установление причинно следственных связей; построение логической цепи рассуждения, доказательство [2]. Именно и только в результате их использования в процессе знаково-символической деятельности обучающие, осваивая геометрию, создают и используют собственные образовательные продукты – учебные модели.

Выделены следующие отличительные особенности геометрически:

1)условие и данные в задаче могут быть представлены в форме: рисунка, таблицы, схемы, диаграммы, графика, что затем потребует распознавания объектов;

2)явное или неявное указание области применения результата, полученного при решении задачи;

3) в структуре задачи неопределенны некоторые из ее компонентов;

4) в условии может быть наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных, из-за этого формулировка условия объемная;

5) решение задачи может предполагать несколько способов решения, причем данные способы могут быть неизвестны учащимся.

Отмечены следующие этапы решения геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся :

1) анализ содержания текста задачи;

2) перевод условия задачинаязыкматематическойтеории, подходящей для ее решения, т.е. построениематематическоймоделизадачи;

3) составление плана решения;

4) решениезадачиврамках математической модели;

5) проверка и анализ решения задачи.

Было рассмотрено, какие познавательные универсальны учебные действия формируются на каждом этапе решения практико-ориентированной задачи. Также на наиболее трудных этап решения задачи была показана организация деятельности учащихся. В приложении приведены варианты использования геометрических задач, направленных на формирование познавательных УУД обучающихся на различных этапах урока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмолов А.Г. Формирование универсальных учебных действий в школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя/под ред. А.Г. Асмолова. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.
2. Баталова В.К. Сборник тестовых заданий для тематического и итогового контроля. Математика 4 класс. / Баталова В.К. – М.: «Интеллект-Центр», 2009 – 80с.
3. Беседы с учителем. Методика обучения 4 класс. Под редакцией Л.Е. Журовой. Издательский центр «Вентана-Граф» 2010.
4. Голубь В.Т. Итоговое тестирование 4 класс (1-4). Контрольно-измерительные материалы. Воронеж: ИП Лакоценина Н.А.,2011.-80с
5. Денищева Л.О., Глазкова Ю.А, Краснянская К.А. Проверка компетентности выпускников средней школы при оценке образовательных достижений по математике // Математика в школе. - 2008. - №6. - С. 19-30.
6. Дидактический материал (разрезные карточки, таблицы по математике)
7. Диск. Дидактический и раздаточный материал. Начальная школа. Математика 3-4 классы. Издательство Учитель.– 2012
8. Диск. Тренировка арифметических способностей. Спецподготовка
9. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра. 7 класс. Учебник. - 2-е изд. - М.: Просвещение, 2014. - 287 с.
10. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра. 8 класс. Учебник. - 3-е изд. - М.: Просвещение, 2016. - 320 с.
11. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. Алгебра. 9 класс. Учебник. - 5-е изд. - М.: Просвещение, 2010. - 304 с.
12. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учебной деятельности: Книга для учителя. - М.: Просвещение, 1990. - 128 с.

13. Итоговая аттестация по окончании начальной школы в соответствии ФГОС. Волгоград 2012год
14. Калмыкова, З.И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / З.И. Калмыкова. – М. : Педагогика, 1981. – 200 с.
15. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра. 8 класс. Учебник. - 17-е изд. - М.: Просвещение, 2013. - 336 с.
16. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Алгебра. 9 класс. Учебник. - М.: Просвещение, 2014. - 336 с.
17. Кудревич С.П. Формирование УУД школьников в процессе выполнения практико-ориентированных заданий по математике [Электронный ресурс] // URL:https://infourok.ru/avtorskaya_koncepciya_po_teme__formirovanie_uud_shkolnikov_v_processe_vypolneniya-327678.htm (Дата обращения: 5.03.2016)
18. Математика 3-4 класс: тестовый контроль знаний/ авт. – сост.Н.Г. Глинская. – Волгоград: Учитель, 2011.- 127с
19. Математика 4 класс: итоговая тестовая проверка зщнаний/ авт.-сост.Е.В. Волкова. Волгоград : Учитель, 2011. – 67с.
20. Математика 4 класс: тренинговые задания/ сост. Н.В.Лободина. – Волгоград: Учитель, 2007. – 204с.
21. Математика в экзаменационных вопросах и ответах. Справочник для учителей и абитуриентов / Под редакцией Л. И. Василюк, Л. В. Куваевой, Б. К. Галикевич. – Минск: Изд-во БелЭн, 2013.
22. Математика. Комментарий к урокам. Методика обучения. Авторы Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.. Издательский центр «Вентана-Граф» 2012г.
23. Математика. Мультимедийное сопровождение уроков в начальнойщколе.

24. Математика. Оценка знаний. Проверочные и контрольные работы. Авторы Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.. Издательский центр «Вентана-Граф» 2013.
25. Мельникова Е.Л. Проблемный урок, или Как открывать знания с учениками: Пособие для учителя. - М.: АПК и ППРО, 2002. - 168 с.
26. Мирзоахмедов М. Методика обучения решению прикладных задач при углубленном изучении математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. - Душанбе, 1989. - 125 с.
27. Печенкина Е.Н. Практико-ориентированные задачи на уроках математики в основной школе [Электронный ресурс] // URL:http://rudocs.exdat.com/docs/index-100680.html (Дата обращения: 10.04.2016).
28. Пивоваркин О. К. Общий прием решения задач как компонент познавательных универсальных учебных действий // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения. – 2015. - №5 . - С. 115-117.
29. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителя. / Под ред. Ю.М.Гайдука. - М.: Учпедгиз, 1959. - 208 с.
30. Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студентов вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров. / Под ред. Е.С. Полат. - М.: «Академия», 2001. - 66 с.
31. Примерные программы по математике. – М.: Просвещение, 2010. – 67 с.
32. Рейнгард И.А. Сборник задач по геометрии и тригонометрии с практическим содержанием. - М.: Учпедгиз, 1960. - 116 с.
33. Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В. Математика: 4 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений: в двух частях – 2-е изд., испр. и доп. – М.: «Вентана-Граф», 2013.

34. Системный анализ процесса мышления / Под ред. К.В. Судакова, АМН СССР. – М. : Медицина, 1989. – 336 с.
35. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием. - М.: МЦНМО, 2010. - 136 с.
36. Смирнова, А.А. Организация повторения9 классе при подготовке к аттестации в новом формате / А.А. Смирнова, Е.Ю. Лукичёва, А.Н. Тернопол // Математика в школе. – 2010. – № 3. – С. 34–41.
37. Соболева Г.В., Тактарова И.С., Садыкова И.А. Познавательные универсальные учебные действия [Электронный ресурс] // URL: http://sgls.admsurgut.ru/win/download/1747/ (Дата обращения: 15.03.2016)
38. Степанова О.В. Формирование познавательных универсальных учебных действий средствами игры // Приоритетные научные направления: от теории к практике. - 2016. - №21. - С. 42-47.
39. Туркина, В.М. Методический аспект про-блемы преемственности в развивающем обуче-нии школьников математике / В.М. Туркина // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2003. – № 6 (том 3). – С. 249–258.
40. Узорова О.В. итоговые тесты по математике: 4кл./ О.В. Узорова, Е.А. Нефедова. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – 94с
41. Федеральный государственный образовательный стандарт [Электронный ресурс]: официальный сайт/URL:http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2661.;
42. Федеральный государственный образовательный стандарт начального и основного общего образования / Министерство образования и науки РФ – М.: Просвещение, 2012.
43. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с

44. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - №6. - С. 179-186.
45. Чуракова Р.Г., Захарова О.А. Научим ли мы плавать без воды? // Методист. - 2005. - №5. - С. 15-18. Планируемые результаты начального общего образования / под ред. Г.С. Ковалёвой, О.Б. Логиновой. – М. : Просвещение, 2009. – 120 с.
46. Школьный гид [Электронный ресурс]: официальный сайт/URL:http://www.schoolguide.ru/index.php/progs/school-russia.html.
47. Штейнгауз В.Г. Математический калейдоскоп. – М.: Бюро «Квантум», 2005.
48. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1985
49. Якиманская, И.С. Основные направленияисследования образного мышления / И.С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1985. – № 5. – С. 5–17.