Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»

А. А. Бондарь
С. С. Коробков

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Учебное пособие

Екатеринбург, 2018 г.

УДК 51(075.8)
ББК В1я7
Б81

рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уральский государственный педагогический университет»
в качестве учебного издания (Решение № 36 от 28.04.2018)

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Т. И. Ершова
Рецензент: к.п.н., доцент Р. Ф. Мамалыга

Бондарь, А. А.
Б81 Основы математической обработки информации[Электронный ресурс] : учебное пособие / А. А. Бондарь, С. С. Коробков ; Урал. гос. пед. ун-т. – Электрон. дан. – Екатеринбург : [б.и.], 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN978-5-7186-1022-2

Данное учебное пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Основы математической обработки информации». Материал первой части изложен в форме лекций. В конце каждой лекции приведен список вопросов для самопроверки, а также набор упражнений, необходимый для усвоения основных понятий. В приложении приведена зачетная работа.

УДК 51(075.8)
ББК В1я7

ISBN978-5-7186-1022-2

Содержание

Введение

Учебное пособие "Основы математической обработки информации"предназначено студентам, обучающимся по направлению "44.03.01 - Педагогическое образование"(все профили). Оно включает в себя следующие разделы:

1. Элементы математической логики.
2. Элементы теории множеств.
3. Элементы комбинаторики.
4. Введение в теорию вероятностей.
5. Элементы математической статистики.

Каждый раздел содержит необходимый теоретический минимум. Приводимые понятия сопровождаются достаточным количеством примеров, облегчающих усвоение материала. Применение математических методов обработки информации демонстрируется на конкретных задачах. В конце каждого раздела содержатся упражнения для самостоятельного решения. Помимо упражнений имеется перечень вопросов для самопроверки. В Приложении приведены задания для контрольной работы, образцы их выполнения и примерный список вопросов для зачета. Данное учебное пособие будет полезным для студентов всех форм обучения: очной, заочной и дистанционной.

1 Высказывания. Логические операции

1.1 Понятие высказывания

Под *высказыванием* понимается повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Высказывания будем обозначать заглавными латинскими буквами. Примеры высказываний:

D : 5 – простое число.

E : $12 = 2^2 \cdot 3$.

F : Земля – спутник Луны.

G : Функция $y = \cos x$ является четной.

H : Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – различные векторы, то $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$.

Каждое высказывание кроме своего смыслового значения имеет и истинностное значение, которое есть истина (сокращенно И) или ложь (сокращенно Л). Так в предыдущих примерах истинностные значения высказываний D, E, G, H равны И, а истинностное значение высказывания F равно Л. Высказывания D, E, F, G являются примерами *простых высказываний*, высказывание H — пример *сложного высказывания*. Сложные высказывания образуются из простых с помощью *логических операций (связок)*. Определим следующие логические операции: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и эквиваленцию.

1.2 Логические операции

Определение 1.1 *Отрицанием* высказывания A называется высказывание $\neg A$[1] (читается «не A»), которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание A ложно.

Определение 1.2 *Конъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание $A \wedge B$ (читается «A и B»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Определение 1.3 *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание $A \vee B$ (читается «A или B»), которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Определение 1.4 *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание $A \Rightarrow B$ (читается «если A, то B»), которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно.

[1] В некоторых учебниках высказывание $\overline{A}$.

Высказывания A и B в импликации имеют специальные названия: высказывание A называется *посылкой* или *условием*, а высказывание B называется *следствием* или *заключением*.

Определение 1.5 *Эквиваленцией* высказываний A и B называется высказывание $A \Leftrightarrow B$ (читается «A тогда и только тогда, когда B»), которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно истинны или ложны.

Примеры. Пусть буквы D, E, F, G, H имеют тот же смысл, что и выше. Тогда высказывание $(\neg D) \vee G$: «5 — не простое число или функция $y = \cos x$ является четной», является истинным, так как высказывание G истинно. Высказывание $(E \wedge (\neg G)) \Leftrightarrow F$: «$12 = 2^2 \cdot 3$ и функция $y = \cos x$ является четной тогда и только тогда, когда Земля — спутник Луны », не смотря на свою бессмысленность истинно, так как высказывания $(E \wedge (\neg G))$ и F одновременно ложны. Высказывание $D \Rightarrow \neg G$: «если 5 — простое число, то функция $y = \cos x$ не является четной» ложно, так как высказывание D истинно, а высказывание $\neg G$ ложно.

1.3 Формулы логики высказываний

Логические операции над высказываниями обладают различными свойствами. Применение свойств позволяет, с одной стороны, сводить анализ сложных высказываний к анализу более простых высказываний, а с другой стороны — преобразовывать длинные цепочки высказываний в более короткие. Очевидно, что главным критерием верности выполненных преобразований является совпадение истинностных значений первоначального и полученного высказываний для каждого шага преобразований.

Изучение свойств логических операций естественно проводить не на конкретных высказываниях, а на особых выражениях, содержащих переменные, принимающие значения И и Л (такие переменные называются *логическими* переменными), знаки логических операций и круглые скобки для указания порядка выполнения действий. Логические переменные будем обозначать малыми латинскими буквами и называть их просто переменными. Сформулируем определение *формулы логики высказываний*:

Определение 1.6 1) Логические переменные, буквы И и Л являются формулами логики высказываний;

2) если A и B — формулы логики высказываний, то формулами логики высказываний являются также выражения: $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$;

3) выражение является формулой логики высказываний тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет первому или второму пункту данного определения.

Примеры формул логики высказываний:

$$(\neg A \wedge (A \vee (B \Rightarrow C)))\,,\ ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge C))\,,\ (A \vee \neg(B \Rightarrow C))\,.$$

Следующие выражения не являются формулами логики высказываний:

$$(\vee),\ (\neg A)\neg B,\ (\vee A \vee B),\ (A\neg \Rightarrow B).$$

Из определения 1.6 следует, что формулы логики высказываний внешне схожи с буквенными выражениями элементарной алгебры, а именно: содержат конечное число переменных, то есть элементарных формул, левых и правых скобок, знаков логических операций и букв И и Л. В дальнейшем там, где не возникает двусмыслия, для сокращения речи мы слова «формула логики высказываний» будем заменять словом «формула». Как правило, формула логики высказываний, содержащая пять или более знаков логических операций, — это громоздкое и трудно читаемое выражение. Формулу можно упростить за счет уменьшения числа скобок в ней, приняв следующие соглашения:

1) внешние скобки в формуле можно опускать;

2) внутренние скобки в формуле можно опускать с учетом следующего порядка выполнения действий: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Пример такого упрощения: формулу $(A \Leftrightarrow (B \Rightarrow (C \vee (D \wedge (\neg E)))))$ можно записать более коротко: $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C \vee D \wedge \neg E$. Очевидно, что совсем без скобок обойтись нельзя. Действительно, в формулах $A \wedge (B \vee C)$ и $A \wedge B \vee C$ различные порядки выполнения действий.

Подставляя в формулу вместо переменных их допустимые значения и выполняя указанные в ней действия, находим истинностное значение формулы. Зависимость истинностных значений формулы от значений входящих в нее переменных наглядно иллюстрируют *истинностные таблицы*. С использованием этих таблиц основные логические операции можно было бы определить так:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
И	И	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

Существуют формулы, истинностные значения которых не зависят от значений входящих в них переменных. Такие формулы имеют специальные названия.

Определение 1.7 Формула логики высказываний называется *тождественно истинной (тождественно ложной),* если при любых значениях входящих в нее переменных ее истинностное значение равно истине (лжи).

Тождественно истинные формулы называют также *тавтологиями*, а тождественно ложные — *противоречиями*. Примерами тождественно истинных формул являются формулы $p \vee \neg p$, $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, $p \Rightarrow p \vee q$, а примерами тождественно ложных — формулы $p \wedge \neg p$, $(p \wedge (\neg p \vee q)) \wedge \neg q$. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно составить для каждой из формул таблицу истинности. Покажем это на примере формулы $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$. Переменными в этой формуле являются буквы p и q. Порядок выполнения действий таков: импликация (в скобках), конъюнкция, импликация. В соответствии с этим выделяем части, из которых состоит формула: $p \Rightarrow q$, $p \wedge (p \Rightarrow q)$ и составляем таблицу истинности:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	И

Существуют формулы, которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными. Такие формулы принимают истинностные значения И и Л. Примеры таких формул: p, $p \vee \neg q$, $p \Rightarrow \neg q$.

Определение 1.8 Две формулы логики высказываний A и B называются *равносильными,* если при любом наборе значений переменных, входящих в эти формулы, истинностные значения формул A и B равны.

То, что формулы A и B равносильны, будем записывать так: $A \equiv B$.

Теорема 1.1 (Законы логики высказываний) *Пусть буквы A, B, C обозначают произвольные формулы логики высказываний. Тогда истинны следующие утверждения:*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ A \wedge A \equiv A, \\ 2.\ A \vee A \equiv A, \end{array}\right\} \quad \text{— \textit{свойства идемпотентности}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ A \wedge B \equiv B \wedge A, \\ 4.\ A \vee B \equiv B \vee A, \end{array}\right\} \quad \text{— \textit{свойства коммутативности}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C, \\ 6.\ A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C, \end{array}\right\} \text{— \textit{свойства ассоциативности}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \\ 8.\ A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \end{array}\right\} \text{— \textit{свойства дистрибутивности}}$$

$$\left.\begin{array}{r} 9.\ \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \\ 10.\ \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \end{array}\right\} \quad \text{— \textit{свойства де Моргана}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ A \wedge (A \vee B) \equiv A, \\ 12.\ A \vee (A \wedge B) \equiv A, \end{array}\right\} \quad \text{— \textit{свойства поглощения}}$$

13. $\neg(\neg A) \equiv A,$ — *свойство двойного отрицания*

14. $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A,$ — *свойство контрапозиции*

15. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B,$ — *свойство отрицания импликации*

16. $A \wedge \neg A \equiv Л,$ — *свойство противоречия*

17. $A \vee \neg A \equiv И,$ — *свойство исключенного третьего*

18. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B,$

19. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A),$

20. $A \wedge И \equiv A,$

21. $A \vee И \equiv И,$

22. $A \wedge Л \equiv Л,$

23. $A \vee Л \equiv A.$

Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнимость сформулированных свойств для пропозициональных переменных. Такую проверку удобно осуществить с помощью истинностных таблиц. Покажем как это сделать на примере свойства 7.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	И	Л	И	И
И	Л	И	И	Л	И	И	И
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

Сравнивая два последних столбца, заключаем, что $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Применение свойств логических операций позволяет выполнять различные действия: преобразовывать и упрощать формулы, определять вид формулы, устанавливать равносильность формул. Иллюстрацией этому служат следующие две задачи.

Задача 1.1. Доказать, что формула $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ является тождественно истинной.

Решение: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \overset{18}{\equiv} p \wedge (\neg p \vee q) \overset{7}{\equiv} (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \Rightarrow q \overset{16}{\equiv} \text{Л} \vee (p \wedge q) \Rightarrow q \overset{3}{\equiv} (p \wedge q) \vee \text{Л} \Rightarrow q \overset{23}{\equiv} p \wedge q \Rightarrow q \overset{18}{\equiv} \neg(p \wedge q) \vee q \overset{9}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee q \overset{6}{\equiv} \neg p \vee (\neg q \vee q) \overset{17}{\equiv} \neg p \vee \text{И} \overset{21}{\equiv} \text{И}$.

Числа, стоящие над знаками равносильности, означают номера примененных свойств из теоремы 1.1.

Задача 1.2. Доказать равносильность формул $p \Rightarrow \neg(q \vee p) \vee \neg(r \vee q)$ и $\neg(p \wedge (q \vee r))$.

Решение: $p \Rightarrow \neg(q \vee p) \vee \neg(r \vee q) \overset{9}{\equiv} p \Rightarrow \neg((q \vee p) \wedge (r \vee q)) \overset{4}{\equiv} p \Rightarrow \neg((q \vee p) \wedge (q \vee r)) \overset{8}{\equiv} p \Rightarrow \neg(q \vee (p \wedge r)) \overset{18}{\equiv} \neg p \vee \neg(q \vee (p \wedge r)) \overset{9}{\equiv} \neg(p \wedge (q \vee (p \wedge r))) \overset{7}{\equiv} \neg((p \wedge q) \vee (p \wedge (p \wedge r))) \overset{5}{\equiv} \neg((p \wedge q) \vee ((p \wedge p) \wedge r))) \overset{1}{\equiv} \neg((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \overset{7}{\equiv} \neg(p \wedge (q \vee r))$.

Решения задач 1.1 и 1.2 проведены подробно, каждому знаку равносильности соответствует применение одного свойства логических операций. На практике, по мере накопления опыта в таких преобразованиях, применяют за один шаг несколько свойств, и потому цепочки равносильностей в аналогичных примерах становятся значительно короче. Очевидно, что метод преобразования формул наиболее экономичен по сравнению с методом истинностных таблиц. Однако без метода истинностных таблиц совсем обойтись нельзя, так как на его использовании основано доказательство свойств логических операций.

Задача 1.3. На ступеньках дома сидят рядышком мальчик и девочка. – Я мальчик, - говорит ребёнок с чёрными волосами. — А я девочка, - говорит ребёнок с рыжими волосами. Если, по крайней мере, один из детей говорит неправду, то кто из них мальчик, а кто девочка?

Решение: Для двух произвольных высказываний существуют четыре возможные комбинации типа "истина - ложь а именно: И - И, И - Л, Л - И, Л - Л. Первая из них исключается, поскольку в условии оговаривается, что по крайней мере одно из высказываний является ложным. Вторая и третья комбинации также исключается, потому что если один ребёнок врал, то и другой не мог говорить правду, иначе мы бы имели дело с двумя мальчиками или с двумя девочками, что противоречит условию. Следовательно, оба говорили неправду. Итак, у мальчика рыжие волосы, а у девочки чёрные.

Задача 1.4. В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Иванова, Петрова и Сидорова, умеющих играть на скрипке,флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

1. Петров самый высокий.
2. Играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте.
3. Играющие на скрипке и флейте и Иванов любят пиццу.
4. Когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Петров мирит их.
5. Иванов не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Решение: Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание. Из таблицы видно, что на трубе может играть только Сидоров.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Иванов	0	0	1	1	0	0
Петров			0	0		0
Сидоров			0	0		

Из условий 1 и 2 следует, что Петров не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Иванов, ни Петров, то скрипачом является Сидоров. Оба инструмента, на которых играет Сидоров, теперь определены, поэтому остальные клетки строки “Сидоров” можно заполнить нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Иванов	0	0	1	1	0	0
Петров	0		0	0		0
Сидоров	1	0	0	0	0	1

Из таблицы видно, что играть на флейте и на гобое может только Петров.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Иванов	0	0	1	1	0	0
Петров	0	1	0	0	1	0
Вессон	1	0	0	0	0	1

Ответ: Иванов играет на альте и кларнете, Петров - на флейте и гобое, Сидоров - на скрипке и трубе.

1.4 Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под высказыванием?
2. Сформулируйте определения логических операций.
3. Что называется формулой логики высказываний?
4. Каков порядок выполнения логических операций в формуле?
5. Какая формула называется тождественно истинной (тождественно ложной)?
6. В чем заключается метод истинностных таблиц?
7. Какие две формулы называются равносильными?
8. Сформулируйте и докажите основные свойства логических операций.

1.5 Упражнения

1. Определить какие из следующих предложений являются высказываниями:
   (a) Число 1001 не делится на 13.
   (b) Если $a > b$>0, то $a^2 > b^2$.
   (c) Если $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.
   (d) Привет всем!
   (e) $2 + 2 = 5$.
   (f) Который час?
   (g) Сегодня 7-е сентября.

2. Укажите какие из следующих выражений являются формулами логики высказываний:

   (a) $(A \Leftarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$;
   (b) $((A \Rightarrow) \Rightarrow B)$;
   (c) $(A \wedge \neg A) \wedge A$;
   (d) $(A \vee B\neg \Rightarrow A \wedge B)$.

3. Используя соглашения об экономии скобок, уменьшите число скобок в следующих формулах:

   (a) $(\neg(A \vee B) \vee (A \wedge \neg(C)))$;
   (b) $(A \wedge B) \Rightarrow (C \Leftrightarrow D) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$;
   (c) $(A \Rightarrow B) \vee ((\neg A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge B))$;
   (d) $(((A \wedge B) \vee C) \wedge D) \Rightarrow (\neg B)$.

4. С помощью метода истинностных таблиц определите вид следующих формул:

   (a) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
   (b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$;
   (c) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p)$;
   (d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$;
   (e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$;
   (f) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$.

5. С помощью метода истинностных таблиц докажите равносильность следующих формул:

   (a) $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (r \Rightarrow p)$ и $p \vee \neg(q \vee r)$;
   (b) $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)$ и $\neg q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
   (c) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg p)$ и $p \Rightarrow q \wedge r$;
   (d) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ и $(r \Rightarrow p) \vee q$.

6. Докажите утверждение: формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда формула $A \Leftrightarrow \neg B$ является тождественно ложной.

7. Исключите эквиваленцию и импликацию из следующих формул:

(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee \neg r)$;

(b) $((p \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p) \wedge r$;

(c) $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r)$;

(d) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

8. С помощью свойств логических операций докажите следующие равносильности:

   (a) $\neg p \vee (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$;

   (b) $p \Leftrightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge (q \vee r)) \vee \neg(p \vee (q \vee r))$;

   (c) $\neg p \vee \neg(q \wedge r) \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$.

9. Запишите равносильности, выражающие логические операции конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию через

   (a) отрицание и конъюнкцию;

   (b) отрицание и дизъюнкцию;

   (c) отрицание и импликацию.

10. Придумайте формулу логики высказываний, зависящую от трех переменных p, q, r и принимающую значение И, когда

    (a) только три из переменных принимают значение И;

    (b) только две из переменных принимают значение И;

    (c) только одна из переменных принимает значение И.

11. Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными:

    (a) Джо ловкач;

    (b) Джо не везет;

    (c) Джо везет, но он не ловкач;

    (d) если Джо ловкач, то ему не везет;

    (e) Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везет;

    (f) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

12. Разбирается дело Иванова, Сидорова и Петрова. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления. Иванов: "Я не делал этого. Сидоров не делал этого". Сидоров: "Иванов не делал этого. Петров сделал это". Петров: "Я не делал этого. Иванов сделал это". Было установлено далее, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, третий - раз солгал, раз сказал правду. Кто совершил преступление?

13. Жили три молодых человека - Андрей, Бронислав и Борис. Один из них - аптекарь, другой - бухгалтер, третий - агроном. Один живет в Бобруйске, другой - в Архангельске, третий - в Белгороде. Требуется выяснить, кто где живет и у кого какая профессия. Известно лишь что:

    - Борис бывает в Бобруйске наездами и то весьма редко, хотя все его родственники живут в этом городе.
    - У двоих из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и имена.
    - Жена аптекаря приходится Борису младшей сестрой.

14. Света, Марина, Андрей, Кирилл и Юра держат домашних животных. У каждого либо кошка, либо собака, либо попугай. Девочки не держат собак, а мальчики попугаев. У Светы нет кошки. У Светы и Марины разные животные. У Марины и Андрея — одинаковые. У Андрея и Кирилла — разные. У Кирилла и Юры — одинаковые. Какие животные у каждого.

15. В школе учатся 4 талантливых мальчика: Иванов, Петров, Сидоров и Андреев. Один из них — будущий музыкант, другой преуспел в бальных танцах, третий — солист хора мальчиков, четвертый подает надежды как художник. О них известно следующее:

    - Иванов и Сидоров присутствовали в зале консерватории, когда там солировал в хоре мальчиков певец.
    - Петров и музыкант вместе позировали художнику.
    - Музыкант раньше дружил с Андреевым, а теперь хочет познакомиться с Ивановым.
    - Иванов не знаком с Сидоровым, т.к. они учатся в разных классах и в разные смены.

    Кто чем увлекается?

2 Предикаты. Кванторы

2.1 Предикаты

Для обозначения объектов в математике и других областях человеческих знаний используются буквы. При этом буквами обозначаются как конкретные объекты, например: A — точка с координатами (2;0), так и произвольные объекты, например: B — высказывание. Во втором случае значениями букв могут быть различные объекты из какого-нибудь множества. Такие буквы мы будем называть *предметными переменными*.

Предложения с переменными часто построены так же, как построены высказывания. Сравните, например, предложения: «5 — простое число» и «x — простое число». Но часто предложения с переменными высказываниями не являются. Так в предыдущем примере предложение «x — простое число» не является высказыванием, но оно превращается в высказывание тогда, когда вместо x мы подставляем конкретное число. Объекты, для которых используется переменная в предложении, будем называть *допустимыми значениями* переменной. В тех случаях, когда допустимыми значениями переменной x будут натуральные, целые, рациональные или действительные числа, переменную x будем называть соответственно *натуральной, целой, рациональной или действительной переменной.* Логической переменной, как мы знаем, называется переменная, чьи допустимые значения — буквы И и Л.

Определение 2.1 Пусть M — некоторое множество. *Одноместным предикатом, определенным на множестве M,* называется предложение с одной переменной, которое превращается в высказывание при подстановке вместо этой переменной любого ее значения из множества M.

Одноместные предикаты будем обозначать заглавными латинскими буквами с указанием в скобках переменной. Примеры одноместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел:

$$\begin{aligned} P(x): &\quad x^2 - 1 = 0, \\ Q(y): &\quad y > 3, \\ T(z): &\quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Определение 2.2 Пусть M — некоторое множество. *Двуместным предикатом,* определенным на множестве M, называется предложение с двумя переменными, которое превращается в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых их значений из множества M.

Двуместные предикаты будем обозначать заглавными латинскими буквами с указанием в скобках переменных. Примеры двуместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел:

$$\begin{aligned} R(x,y):&\quad xy=1,\\ U(x,y):&\quad x>y,\\ V(x,y):&\quad |x|=|y|. \end{aligned}$$

Если в двуместном предикате заменить одну из переменных любым ее допустимым значением, то получится одноместный предикат, например, $R(2,y)$: $2y=1$ или $U(x,1)$: $x>1$.

По аналогии с двуместным предикатом можно определить более общее понятие – понятие n-местного предиката, как предложение, содержащее n переменных и превращающееся в высказывание при замене всех переменных их допустимыми значениями.

Высказывания могут быть получены из соответствующих предикатов, например, высказывание $3>2$ может быть получено из одноместного предиката $x>2$ или даже из двуместного предиката $x>y$. Сложные предикаты могут быть получены из простых с помощью логических операций, аналогичных тем, которые были определены в пункте 1.2 для высказываний. При этом надо иметь в виду, что в результате применения логической операции может получится предикат, в котором количество переменных отлично от количества переменных в исходных предикатах. Например, если $P(x)$: $x>5$ и $Q(x)$: «x делится на 3», то предикат $P(x)\wedge Q(x)$: «$x>5$ и x делится на 3» является одноместным. Если в одном из предыдущих предикатов (например, в $Q(x)$) переменную x обозначить буквой y, то предикат $P(x)\wedge Q(y)$: «$x>5$ и y делится на 3» будет уже двуместным. Аналогичная ситуация может возникать при оперировании с многоместными предикатами. Логические операции применимы и к предикатам с различным числом переменных. Например, пусть $Q(x,y)$: $x+y=2$, $P(x)$: $x^2+3x+1>0$. Тогда предикат $P(x)\Rightarrow Q(x,y)$: «если $x^2+3x+1>0$, то $x+y=2$» является двуместным предикатом.

Отметим без доказательства, что операции над предикатами обладают теми же свойствами, что и операции над высказываниями (см. теорему 1.1).

Значением любого предиката (то есть значением, получающимся в результате замены всех предметных переменных их допустимыми значениями) является высказывание. Высказывание, как мы знаем, может быть истинным или ложным. Например, предикат $P(x)$: «x — простое число» при $x=2$ принимает значение истинного высказывания: «2 — простое число», а при $x=4$ принимает значение ложного высказывания: «4 — простое число». Однако предикат $Q(x)$: «если x

— действительное число, то $x^2 \geqslant 0$» при любом действительном значении x дает истинное высказывание. Такой предикат имеет специальное название.

Определение 2.3 Предикат $P(x)$*, заданный на множестве* M*,* называется *тождественно истинным (тождественно ложным),* если для любого значения x из множества M этот предикат принимает значение истинного (ложного) высказывания. Предикат, не являющийся тождественно ложным, называется *выполнимым.*

Примеры тождественно истинных предикатов:

$$P(x):\ |x| \geqslant 0,\ Q(x):\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

тождественно ложных:

$$T(x):\ \cos x > 1,\ P(x):\ x^2 < 0;$$

выполнимых:

$$V(x):\ 3x > 0,\ W(x):\ 2x = 1,$$

где x — действительная переменная.

Определение 2.4 Назовем два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, заданные на множестве M, *равносильными,* если при любом $x = a$ из множества M истинностные значения получаемых высказываний $P(a)$ и $Q(a)$ равны.

Если, что предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны, то будем записывать так: $P(x) \equiv Q(x)$. Пример равносильных предикатов, заданных на множестве положительных действительных чисел: $P(x)$: $\lg x \geqslant 0$ и $Q(x)$: $x \geqslant 1$.

Равносильность двуместных предикатов определяется аналогично.

2.2 Кванторы

Рассмотрим два логических символа, которые называются *кванторами:* $\forall$ — квантор всеобщности (читается «для любого») и $\exists$ — квантор существования (читается «существует»). Пусть x — предметная переменная. Тогда выражение «для любого x» будем записывать в виде $\forall x$, а выражение «существует x» будем записывать так: $\exists x$. Происхождение знаков $\forall$ и $\exists$ связано с английскими словами All — все и Exists — существует, а слова квантор — с латинским словом quantum — сколько. Кванторы употребляются как приставки перед предикатами и действуют на предикаты. Пусть $P(x)$ — произвольный одноместный предикат, зависящий от переменной x. Тогда под выражением $\forall x\, P(x)$ мы будем понимать высказывание, истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен. Под выражением $\exists x\, P(x)$ мы будем понимать высказывание, истинное тогда и только тогда, когда предикат $P(x)$ не является тождественно ложным.

Приведем примеры. Пусть $P(x)$: $x^2 \geqslant 0$, $Q(x)$: $x = 3$, где x — действительная переменная. Тогда высказывания $\forall x\, P(x)$: «для любого x $x^2 \geqslant 0$», $\exists x\, P(x)$: «существует x такой, что $x^2 \geqslant 0$,» $\exists x\, Q(x)$: «существует x, такой, что $x = 3$» являются истинными, а высказывание $\forall x\, Q(x)$: «для любого x $x = 3$» ложно.

Рассмотрим теперь, как действуют кванторы на двуместные предикаты на примере предиката $P(x, y)$ с действительными переменными: $x^2 + y > 3$. Сначала рассмотрим предложение $\forall x\, P(x, y)$: «для любого x $x^2 + y > 3$». Очевидно, что это предложение не является высказыванием, однако при $y = 4$ получаем истинное высказывание: «для любого x $x^2 + 4 > 3$», а при $y = -1$ — ложное высказывание: «для любого x $x^2 - 1 > 3$». Таким образом, предложение $\forall x\, P(x, y)$ зависит только от переменной y и потому является одноместным предикатом. Переменная x в этом предикате $\forall x\, P(x, y)$ называется *связанной переменной*. Рассмотрим теперь предложение $\exists x\, P(x, y)$: «существует x такой, что $x^2 + y > 3$». Легко видеть, что это предложение не является высказыванием, но превращается в высказывания при конкретных значениях переменной y. Следовательно, $\exists x\, P(x, y)$ — одноместный предикат, зависящий от переменной y, а переменная x в этом предикате является *связанной*.

Рассмотрим следующий пример: пусть $Q(x, y)$: $x + y = 1$, где x, y — действительные переменные. Тогда высказывание $\exists x\, \forall y (x + y = 1)$ ложно. Действительно, не существует такого числа x, чтобы $x + y = 1$ при любом y. Однако высказывание $\forall y\, \exists x (x + y = 1)$ истинно, так как для любого значения y существует значение $x = 1 - y$ такое, что $x + y = 1$. Этот пример говорит о том, что *перестановка между собой разноименных кванторов может привести к различным по смыслу высказываниям*. Истинностные значения высказываний $\forall\, x \forall y (x + y = 1)$ и $\forall y\, \forall x (x + y = 1)$, а так же высказываний $\exists\, x \exists y (x + y = 1)$ и $\exists y\, \exists x (x + y = 1)$ равны. В этих примерах проявляется общее правило: *при перестановке одноименных кванторов смысловые значения получающихся высказываний совпадают.*

2.3 Формулы логики предикатов

Логические операции (включая и операцию приписывания кванторов) над предикатами и их свойства изучаются в логике предикатов. Важную роль в логике предикатов играют особые выражения — *формулы логики предикатов*. Определим формулу логики предикатов. Пусть, как и прежде, малые латинские буквы с индексами или без них обозначают предметные переменные, заглавные латинские буквы с индексами или без них — предикаты.

Определение 2.5 1) Логические переменные, заглавные латинские буквы, а так же выражения вида $P(x)$ и $Q(x, y)$ являются формулами логики предикатов;

2) если P, Q — формулы логики предикатов, то формулами логики предикатов являются выражения $(\neg P)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$, $(P \Leftrightarrow Q)$. Если T — формула логики предикатов, содержащая переменную x, то формулами логики предикатов являются выражения $(\forall x\, T)$ и $(\exists x\, T)$;

3) выражение является формулой логики предикатов тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет первому или второму пункту данного определения.

Формулы логики предикатов будем обозначать заглавными латинскими буквами. Примем соглашение об экономии скобок:

1) внешние скобки в формуле можно опускать;

2) внутренние скобки в формуле можно опускать с учетом следующего порядка выполнения действий: приписывание кванторов, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.

Например, формулу $(((\forall x\, P(x)) \wedge (\neg Q(y))) \vee T(z))$ можно записать в более простом виде: $\forall x\, P(x) \wedge \neg Q(y) \vee T(z)$. В этой формуле $P(x)$ называется *областью действия* квантора $\forall x$. Область действия квантора $\exists x$ в формуле $\exists x\,(P(x) \wedge Q(y))$ есть формула $P(x) \wedge Q(y)$.

Формула логики предикатов, удовлетворяющая первому пункту определения 2.5, называется *элементарной формулой*, а удовлетворяющая второму пункту — *составной формулой*. Элементарные формулы играют роль переменных в составных формулах, так же как логические переменные в формулах логики высказываний. Значениями элементарных формул являются конкретные предикаты.

Определение 2.6 Предикатные формулы A и B называются *равносильными,* если при любом наборе значений входящих в них элементарных формул получаются равносильные предикаты.

То, что формулы A и B равносильны, будем записывать так: $A \equiv B$. Заметим, что проверка того, являются ли две предикатные формулы A и B равносильными, сводится в конечном итоге к сравнению истинностных значений двух высказываний, получающихся из A и B последовательной подстановкой сначала конкретных предикатов, а затем допустимых значений входящих в них предметных переменных. На этом основании мы можем утверждать, что равносильности, имеющие место для формул логики высказываний, сформулированные в теореме 1.1, справедливы и для формул логики предикатов. Покажем на примере одноместных предикатов, что для любых формул A и B логики предикатов справедливо утверждение: $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Для этого возьмем произвольный набор значений элементарных формул, входящих в A и B и получим предикаты $P(x) \wedge Q(x)$ и $Q(x) \wedge P(x)$. Эти предикаты равносильны, так как при любом наборе допустимых значение переменной x получающиеся высказывания $P \wedge Q$ и $Q \wedge P$ имеют равные истинностные значения.

Сформулируем без доказательства еще ряд равносильностей для формул логики предикатов, которые вместе с отмеченными выше называются *законами логики предикатов:*

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \neg(\forall x\, A(x)) \equiv \exists x\, (\neg A(x)), \\ 2.\ \neg(\exists x\, A(x)) \equiv \forall x\, (\neg A(x)), \end{array}\right\} \text{— правила построения отрицаний}$$

3. $\forall x\, \forall y\ A(x, y) \equiv \forall y\, \forall x\ A(x, y)$,

4. $\exists x\, \exists y\ A(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\ A(x, y)$,

5. $\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$,

6. $\exists x\, (A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$.

2.4 Запись предложений на языке логики предикатов

Математические предложения несут информацию об отношениях между математическими объектами: числами, точками, прямыми, векторами, функциями и т. д. Эти отношения: равенство, больше, меньше, принадлежит, делится и т. д. используются в предикатах, многие из которых имеют общепринятые обозначения. Так, например, предикат равенства «x равно y» обозначает так: $x = y$, а предикаты «x больше y» и «x меньше y» обозначаются соответственно $x > y$ и $x < y$, предикат «x принадлежит y» обозначается так: $x \in y$. Используя язык логики предикатов в сочетании с общепринятыми математическими знаками, мы можем получить краткую и понятную запись математических предложений. Предложение считается правильно написанным на этом языке только тогда, когда оно получено из формулы логики предикатов заменой предикатных символов конкретными предикатами. Полученные таким способом выражения так же будем называть *формулами логики предикатов*. Рассмотрим примеры.

1. Запишем на языке логики предикатов такую аксиому: «для любых двух различных точек существует одна и только одна содержащая их прямая». Математические объекты в этом предложении — это точки и прямые. Первые из них

обозначим заглавными, а вторые — малыми латинскими буквами. Выделим теперь отношения между объектами в этом предложении: точки не равны; точки принадлежат прямой; прямые равны. Таким образом, четыре объекта (две точки и две прямые) связаны тремя отношениями (неравенства, принадлежности и равенства): $A \neq B$, $A \in a$, $B \in a$, $A \in a'$, $B \in a'$, $a = a'$. Теперь согласно формулировке аксиомы применим кванторы и получим формулу:

$$\forall A \forall B\, (A \neq B \Rightarrow \exists a\, (A \in a \wedge B \in a \wedge \forall a' (A \in a' \wedge B \in a' \Rightarrow a = a'))).$$

2. Теорема: «прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой другой плоскости, параллельной данной плоскости» записывается следующим образом: $\forall a\, \forall \alpha\, \forall \beta\, (a \perp \alpha \wedge \alpha \parallel \beta \Rightarrow a \perp \beta)$, где a — прямая, α, β — плоскости.

Применение языка логики предикатов к записи математических предложений дает возможность применять законы логики предикатов к получению новых формулировок определений и теорем. Это особенно важно при проведении доказательств методом от противного. Приведем примеры.

3. Сформулируем определение непериодической функции, построив отрицание определения периодической функции. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве R всех действительных чисел. Напомним, что функция $f(x)$ называется периодической, если существует действительное число $T \neq 0$, что при любом x из R выполняются равенства $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, то есть

$$\exists T\, \forall x\, (T \neq 0 \wedge f(x - T) = f(x) \wedge f(x + T) = f(x))\,.$$

Построив отрицание этой формулы согласно правилам построения отрицаний и законам де Моргана, получим такое определение: функция $f(x)$, определенная на множестве действительных чисел, называется непериодической, если

$$\forall T\, \exists x\, (T = 0 \vee f(x - T) \neq f(x) \vee f(x + T) \neq f(x))\,.$$

2.5 Вопросы для самопроверки

1. Что называется одноместным предикатом?
2. Что называется двуместным предикатом?
3. Какие логические операции можно выполнять над предикатами?
4. На какие виды делятся все предикаты?
5. Какие два предиката называются равносильными?

6. Дайте понятия кванторов всеобщности и существования.

7. Как действуют кванторы на одноместные предикаты?

8. Как действуют кванторы на двуместные предикаты?

9. Что называется формулой логики предикатов?

10. Какая формула логики предикатов называется элементарной и какая составной?

11. Какие две формулы логики предикатов называются равносильными?

12. Сформулируйте правила построения отрицаний.

2.6 Упражнения

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями, одноместными или двуместными предикатами:

   (a) сумма двух целых чисел четна, если одно из чисел четно;

   (b) любое положительное число больше любого отрицательного числа;

   (c) среди трех попарно различных натуральных чисел существует наименьшее число;

   (d) разность квадратов любых двух нечетных целых чисел четна.

2. В следующих предложениях выделите и обозначьте предикаты и с помощью этих обозначений и знаков логических операций запишите данные предложения:

   (a) сумма двух четных чисел является четным числом;

   (b) среди любых трех перчаток обязательно найдутся две на одну руку;

   (c) две улицы с одинаковыми названиями не могут находиться в одном городе;

   (d) из двух различных чисел одно обязательно больше другого.

3. Пусть x, y, z — действительные переменные. Определите вид каждого из следующих предикатов:

   (a) $P(x)$: $\sqrt{x^2} = |x|$,

   (b) $Q(x, y)$: $|x| + |y| \geqslant |x + y|$,

(c) $T(x, y)$: $|x-y|+|y-x|=0$,

(d) $V(x, y, z)$: $x^2+y^2 \geqslant z^2$,

(e) $W(x, y)$: $x^x=y^y$,

(f) $F(x, y)$: $1+|x|=-|y|-1$.

4. Определите истинностные значения высказываний:

(a) если $P(x) \vee Q(x)$ — тождественно истинный предикат, то $P(x)$ и $Q(x)$ — тождественно истинные предикаты;

(b) если $P(x) \wedge Q(x)$ — тождественно ложный предикат, то $P(x)$ и $Q(x)$ — тождественно ложные предикаты;

(c) если $P(x) \Rightarrow Q(x)$ — выполнимый предикат, то хотя бы один из предикатов $P(x)$ или $Q(x)$ выполним.

5. Пусть x, y — действительные переменные. Определить истинностное значение каждого из следующих высказываний:

(a) $\forall x \forall y\ x+y=5$;

(b) $\forall x \exists y\ x+y=5$;

(c) $\exists x \forall y\ x+y=5$;

(d) $\exists x \exists y\ x+y=5$.

6. С помощью приписывания кванторов к предикатам из упражнения 3 получите из них истинные или ложные высказывания.

7. Пусть L — множество прямых в пространстве, $x, y, z \in L$. Пусть $P(x, y)$: $x \| y$, $Q(x, y)$: $x \perp y$. Определите истинностностные значения следующих высказываний:

(a) $\forall x \forall y \forall z\ (P(x, y) \wedge Q(y, z) \Rightarrow Q(x, z))$;

(b) $\forall x \forall y \exists z\ (P(x, y) \wedge Q(y, z) \Rightarrow Q(x, z))$;

(c) $\forall x \exists z \forall y\ (P(x, y) \wedge Q(y, z) \Rightarrow Q(x, z))$;

(d) $\exists z \forall x \forall y\ (P(x, y) \wedge Q(y, z) \Rightarrow Q(x, z))$.

8. Сформулировать отрицания следующих высказываний в утвердительной форме, то есть так, чтобы они не начинались со слов «неверно, что»:

(a) если я не позвоню другу и не переговорю с ним о деле, то я не узнаю правду;

(b) целое число n делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3;

(c) когда в товарищах согласья нет, на лад их дело не пойдет;

(d) если прямые не пересекаются, то они параллельны.

9. Записать языком логики предикатов высказывание и его отрицание:

   (a) каждый мальчик сидит с девочкой;

   (b) есть мальчик, который сидит один;

   (c) есть две девочки, которые сидят вместе;

   (d) мальчики и девочки сидят парами;

   (e) нет девочки, которая сидит одна;

   (f) каждая девочка сидит с мальчиком.

   (g) Некоторые подозреваемые не имеют алиби.

   (h) Некоторые студенты - мастера спорта.

   (i) Ни один кит не является рыбой.

   (j) Все разумное действительно.

   (k) Ничто разумное не ставит меня в тупик.

   (l) Некоторые художники не были признаны при жизни.

   (m) Некоторые компьютеры "понимают"устную речь.

   (n) Всякая книга имеет своего автора.

   (o) Некоторые депутаты - экономисты.

   (p) Ни один подложный документ не является доказательством.

10. Запишите на языке логики предикатов и постройте отрицание.

   (a) Не все целые числа четны.

   (b) Каждый школьник, получивший на выпускном экзамене по математике 5, является отличником.

   (c) В прямоугольном треугольнике нет тупого угла.

   (d) Если произведение двух действительных чисел равно 0, то по крайней мере один из сомножителей равен 0.

   (e) Не все люди по утрам чистят зубы и завтракают.

   (f) Всякий равносторонний треугольник является равнобедренным.

(g) Число 20 имеет собственные делители (т.е. делители, отличные от 1 и от 20).

(h) У числа 5 нет собственных делителей.

(i) В множестве натуральных чисел есть наименьшее число.

(j) Так как некоторые книги являются учебниками, то ни один не-учебник не является книгой.

(k) Некоторые художники не были признаны при жизни, значит, есть непризнанные художники.

(l) Ни один человек не имеет права нарушать законы, значит, среди тех, кто имеет право нарушать законы, нет людей.

(m) Некоторые европейские государства являются унитарными. Значит, все унитарные государства являются европейскими.

(n) Все мои друзья отлично знают мой характер, значит, тот, кто отлично знает мой характер - мой друг.

(o) Все трудолюбивые люди берутся за самую сложную работу. Следовательно, ни один из тех, кто не берется за самую сложную работу, не может считаться трудолюбивым человеком.

11. Пусть M – множество букв русского алфавита.

$P(x) : x$ – гласная буква слова "перпендикуляр";

$Q(x) : x$ – гласная буква слова "произведение".

Найдите области истинности предикатов

$$P(x) \wedge Q(x), P(x) \vee Q(x), P(x) \Rightarrow Q(x), P(x) \Leftrightarrow Q(x), \neg P(x), \neg Q(x).$$

12. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$.

$P(x) : x^2 < 15$;

$Q(x) : x \geq 3$.

Найдите области истинности предикатов

$$\neg P(x), \neg Q(x), P(x) \wedge Q(x), P(x) \vee Q(x), P(x) \Rightarrow Q(x), P(x) \Leftrightarrow Q(x).$$

13. Пусть $P(x)$ – предикат, заданный на множестве M. Выясните, будут ли высказывания $\forall x\ P(x)$, $\exists x\ P(x)$ истинными.

(a) M – множество букв в слове “экзамен”, $P(x) : x$ – согласная буква;

(b) M — множество треугольников плоскости, $P(x) : x$ — равносторонний треугольник;

(c) M — множество всех натуральных чисел, $P(x) : x \geq 1$;

(d) $M = \{-4; -2; -1; 1; 2; 5\}$, $P(x) : x \vdots 3$.

14. На множестве натуральных чисел определены предикаты:

$P(x) : x$ — чётное число;

$Q(x) : x$ — нечетное число;

$T(x) : x \vdots 5$;

$S(x) : x$ — простое число.

Выясните смысл следующих высказываний и определите, будут ли они истинными:

(a) $\exists x \ (P(x) \wedge Q(x))$;

(b) $\forall x \ (T(x) \to Q(x))$;

(c) $\exists x \ (\neg Q(x) \wedge S(x))$;

(d) $\forall x \ (\neg P(x) \vee S(x))$;

(e) $\forall x \ (T(x) \wedge S(x) \to Q(x))$.

3 Множества

3.1 Понятие множества

Не все математические понятия могут быть строго определены, так как какие-то из понятий должны быть первоначальными. К числу таких исходных понятий относится понятие множества. Пояснить смысл этого понятия можно, указав синонимы слову «множество». *Множество* — это, иными словами, набор или совокупность каких-либо объектов. Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Множества будем обозначать заглавными латинскими буквами, а элементы множеств — малыми латинскими буквами. То, что a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ (читается «a принадлежит A»). Если b не является элементом множества A, то будем записывать так: $b \notin A$ (читается «b не принадлежит A»).

Множество удобно изображать на плоскости в виде замкнутых областей, а элементы множеств — в виде точек. Тогда то, что элемент a принадлежит множеству A и то, что элемент b не принадлежит множеству A можно проиллюстрировать с помощью рисунка 1.

Рис. 1. $a \in A,\ b \notin A$.

3.2 Способы задания множеств

Очевидно, что множество задано, если определены все его элементы. Определить элементы множества можно двумя способами: либо указав каждый из них, если число их конечно, либо указав присущее им общее характеристическое свойство. В обоих случаях для записи множеств используются фигурные скобки.

Если множество M состоит из элементов $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то будем записывать:

$$M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}.$$

Пример 3.1. Множество всех натуральных делителей числа 12 можно записать так:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Заметим, что порядок, в котором перечисляются элементы, может быть любым. Если множество M состоит из элементов, обладающих свойством $P(x)$, то будем писать

$$M = \{x \mid P(x)\}$$

(читается: «M равно множеству элементов x, таких, что $P(x)$»).

Пример 3.2. Множество всех чисел, больших пяти можно записать так: $M = \{x \mid x > 5\}$. Характеристическое свойство в этом случае $P(x)$: $x > 5$.

Особую роль в математике играют числовые множества, то есть множества, элементы которых — числа. Для некоторых из них приняты специальные обозначения:

- **N** — множество натуральных чисел, то есть чисел $1,\ 2,\ \ldots$;
- **Z** — множество целых чисел, то есть чисел $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$;
- **Q** — множество рациональных чисел, то есть множество обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$, где $m,\ n$ — целые числа и $n \neq 0$;
- **R** — множество действительных чисел, то есть множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей.

3.3 Подмножество

Определение 3.1 Множество B называется *подмножеством* множества A, если все элементы B принадлежат A.

То, что множество B является подмножеством множества A, то будем записывать так: $B \subseteq A$ (читается: «B содержится в A») и помещать замкнутую область B внутри замкнутой области A (как на рисунке 2).

Рис. 2. $B \subseteq A$.

Пример 3.3. Множество $B = \{a, b, d, f\}$ является подмножеством множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, так как все элементы B принадлежат множеству A.

Замечание 3.1 Из определения 3.1 вытекает, что всякое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subseteq A$.

Определение 3.2 Множества A и B называются *равными,* если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

То, что множества A и B равны, будем записывать так: $A = B$ и изображать A и B одной замкнутой областью. Определение равных множеств позволяет понять почему верны следующие равенства:

- ► $\{x \mid x \in R \text{ и } x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$;
- ► $\{4, 2, 5, 3, 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

Замечание 3.2 Наряду со знаком $\subseteq$ будем использовать знак $\subset$. Запись $A \subset B$ означает, что A – подмножество множества B и $A \neq B$.

3.4 Пустое и универсальное множества

Определение 3.3 *Пустым* множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Существует только одно пустое множество. Оно обозначается символом $\varnothing$. Поскольку множество $\varnothing$ не содержит элементов, то оно не может быть изображено никакой замкнутой областью. Пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Определение 3.4 Множество U называется *универсальным по отношению к множествам $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$,* если каждое из этих множеств содержится в U.

Например, множество действительных чисел является универсальным множеством по отношению к множествам натуральных, целых и рациональных чисел.

3.5 Операции над множествами.

Имея два каких-либо множества A и B можно получить новое множество. Для этого надо применить к множествам A и B одну из операций. В этом пункте рассматриваются следующие операции над множествами: пересечение, объединение, разность и дополнение.

Определение 3.5 *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B.
Согласно этому определению

Рис. 3. $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

На рисунке 3 пересечение множеств A и B заштриховано.

Пример 3.4. Пусть $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$. Тогда

$$A \cap B = \{1, 4, 7, 9\}.$$

Пример 3.5. Пусть $P = \{a, b, ab, ba, abc, cab, ac\}$, $Q = \{b, a, c, ba, ca, ac, cab, abc\}$. Тогда

$$P \cap Q = \{a, b, ac, abc, ba, cab\}.$$

Можно рассматривать пересечение не только двух, но и большего количества множеств. На рисунке 4 пересечение трех множеств A, B, C заштриховано.

Отметим ряд очевидных свойств операции пересечения множеств, вытекающих из ее определения.

Рис. 4. $(A \cap B) \cap C$.

Теорема 3.1 *Пусть $A,\ B,\ C$ — произвольные множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *$A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$;*

2. *$A \cap B = B \cap A$;*

3. *$A \cap A = A$;*

4. *$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;*

5. *Если $B \subseteq A$, то $A \cap B = B$;*

6. *Если $A \cap B = B$, то $B \subseteq A$;*

Определение 3.6 *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.
Согласно определению 3.6

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Рис. 5. $A \cup B$.

На рисунке 5 объединение множеств A и B заштриховано.

Пример 3.6. Пусть $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$. Тогда

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Пример 3.7. Пусть $P = \{a, b, ab, ba, abc, cab, ac\}$, $Q = \{b, a, c, ba, ca, ac, cab, abc\}$. Тогда

$$P \cup Q = \{a, b, c, ab, ba, ac, ca, abc, cab\}.$$

Можно рассматривать объединение не только двух, но и большего количества множеств. На рисунке 6 объединение трех множеств A, B, C заштриховано.

Отметим ряд важных свойств операции объединения множеств, вытекающих из определения.

Рис. 6. $(A \cup B) \cup C$.

Теорема 3.2 *Пусть A, B, C — произвольные множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *$A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$;*

2. *$A \cup B = B \cup A$;*

3. $A \cup A = A$;

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

5. *Если* $B \subseteq A$, *то* $A \cup B = A$;

6. *Если* $A \cup B = A$, *то* $B \subseteq A$;

Операции пересечения и объединения множеств связаны между собой следующими двумя свойствами, называемыми свойствами *дистрибутивности:*

Теорема 3.3 *Пусть* $A,\ B,\ C$ *— произвольные множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \tag{1}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{2}$$

Для того, чтобы доказать свойство (1), воспользуемся определением равенства множеств. Докажем сначала включение $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Пусть x — произвольный элемент множества $A \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Последнее означает, что $x \in B$ или $x \in C$. Таким образом, имеем $x \in A$ и $x \in B$ или $x \in A$ и $x \in C$. В каждом из этих случаев $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Значит включение $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ доказано.

Докажем обратное включение $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Пусть x — произвольный элемент множества $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. В первом случае $x \in A$ и $x \in B$, а во втором $x \in A$ и $x \in C$. Из каждого из этих случаев вытекает, что $x \in A \cap (B \cup C)$. Таким образом, включение $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ доказано, а значит доказано и равенство (1).

Свойство (2) доказывается аналогично. Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно.

Приведем еще два важных свойства, которые называются свойствами *поглощения:*

Теорема 3.4 *Пусть* $A,\ B$ *— произвольные множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$A \cap (A \cup B) = A; \tag{3}$$

$$A \cup (A \cap B) = A. \tag{4}$$

Доказательство. Справедливость свойства (3) вытекает из двух очевидных включений: $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ и $A \subseteq A \cap (A \cup B)$. Свойство (4) доказывается аналогично.

Определение 3.7 *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B.

Рис. 7. $A \setminus B$.

Согласно определению 3.7

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

На рисунке 7 разность множеств A и B выделена штриховкой.

Пример 3.8. Пусть $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$. Тогда $A \setminus B = \{2, 6, 8\}$.

Определение 3.8 Пусть множество A является подмножеством универсального множества U. *Дополнением* множества A до множества U называется множество $\overline{A}$, состоящее из тех и только тех элементов множества U, которые не принадлежат множеству A.

Рис. 8. $\overline{A}$.

Согласно определению 3.8

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}.$$

На рисунке 8 дополнение множества A выделено штриховкой.

Замечание 3.3 *Пусть A — подмножество множества U. Тогда для любого элемента x множества U справедливо одно и только одно из двух утверждений: $x \in A$ или $x \in \overline{A}$ и потому*

$$A \cap \overline{A} = \varnothing,$$

$$A \cup \overline{A} = U.$$

Непосредственно из определения 3.8 вытекает свойство *двойного дополнения:*

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Операции пересечения, объединения и дополнения связаны между собой следующими двумя свойствами, называемыми *свойствами де Моргана:*

Теорема 3.5 *Пусть A, B — произвольные подмножества множества U. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \tag{5}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{6}$$

Докажем утверждение (5). Воспользуемся определением 3.2 равенства множеств и докажем сначала включение $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Пусть x — произвольный элемент множества $\overline{A \cap B}$. Тогда согласно определению 3.8 $x \in U$ и $x \notin A \cap B$. Последнее означает, что $x \notin A$ или $x \notin B$. Таким образом, $x \in U$ и $x \notin A$ или $x \in U$ и $x \notin B$, то есть $x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B}$, а потому $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пусть теперь x — произвольный элемент множества $\overline{A} \cup \overline{B}$. Тогда согласно определению 3.6 $x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B}$, то есть $x \in U$ и $x \notin A$ или $x \in U$ и $x \notin B$. Последнее означает, что $x \in U$ и $x \notin A \cap B$. Согласно определению 3.8 $x \in \overline{A \cap B}$. Таким образом, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Утверждение (6) доказывается аналогично. Предлагаем читателю провести доказательство самостоятельно.

Разность и дополнение связаны между собой следующим образом:

Теорема 3.6 *Пусть A, B — произвольные подмножества множества U. Тогда*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $x \in A \setminus B$. Тогда по определению 3.7 имеем: $x \in A$ и $x \notin B$, а по замечанию 3.3 получим: $x \in A$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, $x \in A \cap \overline{B}$ и потому $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$. Обратно: пусть $x \in A \cap \overline{B}$. Тогда согласно определению 1 $x \in A$ и $x \in \overline{B}$, а по замечанию 3.3 получим: $x \in A$ и $x \notin B$. Значит $x \in A \setminus B$ и потому $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$.

Задача 3.5. Пусть

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$A = \{3, 4, 5, 7, 8\},$$
$$B = \{0, 2, 4, 5, 6, 9\}.$$

Найти множество $\quad M = (A \setminus (B \cup (A \cap \overline{B}))) \cap (A \setminus B).$

Решение. Способ 1. Определим порядок выполнения действий и последовательно выполним их:

$$M = (A \overset{4}{\setminus} (B \overset{3}{\cup} (A \overset{2}{\cap} \overset{1}{\overline{B}}))) \overset{6}{\cap} (A \overset{5}{\setminus} B).$$

1. $\overline{B} = \{1, 3, 7, 8\}$;
2. $A \cap \overline{B} = \{3, 7, 8\}$;
3. $B \cup (A \cap \overline{B}) = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
4. $A \setminus (B \cup (A \cap \overline{B})) = \varnothing$;
5. $A \setminus B = \{3, 7, 8\}$;
6. $M = (A \setminus (B \cup (A \cap \overline{B}))) \cap (A \setminus B) = \varnothing$.

Способ 2. Преобразуем множество M, используя некоторые из приведенных выше свойств.

$$\begin{aligned} M &= (A \setminus (B \cup (A \cap \overline{B}))) \cap (A \setminus B) = \\ &= (A \cap \overline{(B \cup (A \cap \overline{B}))}) \cap (A \setminus B) = \\ &= (A \cap (\overline{B} \cap \overline{(A \cap \overline{B})})) \cap (A \setminus B) = \\ &= ((A \cap \overline{B}) \cap \overline{(A \cap \overline{B})}) \cap (A \setminus B) = \\ &= \emptyset \cap (A \setminus B) = \varnothing. \end{aligned}$$

3.6 Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под множеством?
2. Сформулируйте определение подмножества.
3. Какие два множества называются равными?
4. Сформулируйте определения пустого и универсального множества.
5. Равны или нет множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$?
6. Какой из знаков нужно поставить между множеством $\{1\}$ и множеством $\{\{1\},\ \{1,\ 2\}\}$?
7. Что называется пересечением, объединением, разностью двух множеств?
8. Что называется дополнением множества?
9. Какими свойствами обладают операции над множествами?
10. Какими способами можно доказывать равенства множеств?

3.7 Упражнения

1. Пусть A, B, C — множества, для которых верны равенства и $A \cap B = A \cap C$ и $A \cup B = A \cup C$. Можно ли утверждать, что $B = C$?

2. Что можно сказать о множествах $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, если

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1?$$

3. Задайте двумя способами множество точек плоскости с целочисленными координатами, принадлежащих кругу радиуса 2 с центром в начале координат.

4. Задайте с помощью характеристического свойства множество всех точек плоскости, принадлежащих первому координатному углу.

5. Изобразите графически следующие множества:

   а) $A \cap (B \setminus C)$, б) $A \cup (B \cap C)$, в) $A \setminus (B \cap C)$,
   г) $A \setminus (B \setminus C)$, д) $A \setminus (\overline{B} \setminus C)$, е) $A \cap (\overline{B} \cup C)$,

6. В каких случаях

   а) $A \cap B = A$, б) $A \cup B = A$, в) $A \setminus B = A$, г) $A \cup B = A \cap B$?

7. Из 50 студентов 21 изучают английский, 22 – немецкий, 20 – французский, 8 – английский и немецкий, 9 – немецкий и французский, 7 – английский и французский и 3 студента изучают все три языка. Ответьте на следующие вопросы:

   (a) Сколько студентов изучают только английский язык?

   (b) Сколько студентов изучают только немецкий язык?

   (c) Сколько студентов изучают только французский язык?

   (d) Сколько студентов не изучают ни один из указанных языков?

8. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

   $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 12\}$;

   $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

   $C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

   Найдите множество $C \setminus \overline{A \cup B}$.

9. Докажите равенства

(a) $A \setminus ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup C)$;

(b) $A \setminus (B \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B} \cup C)$;

(c) $(A \setminus \overline{B}) \cap (A \setminus C) = A \cap (B \setminus C)$;

(d) $(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C) = A \cup (B \setminus C)$.

10. Выразите через A, B, C множества, заштрихованные на следующих рисунках:

а) б) в)

г) д) е)

Рис. 9.

4 Элементы комбинаторики

4.1 Основные комбинаторные правила

В жизни довольно часто приходится иметь дело с подсчетом числа различных комбинаций. Например, определить количество маршрутов от одного пункта до другого, если путь между ними может быть составлен из нескольких различных участков, или определить количество различных команд, которые можно составить из имеющихся игроков. Задачи такого типа относятся к комбинаторным задачам. Методы решения комбинаторных задач основаны на правилах комбинаторики и на комбинаторных конструкциях. Существует два основных комбинаторных правила: правило сложения и правило умножения.

Комбинаторное правило сложения. Пусть имеются два непересекающихся множества $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Тогда число вариантов выбора одного элемента из A или B равно $m + n$.

Доказательство. Ясно, что один элемент выбирается из объединения множеств A и B. Так как число элементов в множестве $A \cup B$ равно $m + n$, то такой выбор можно осуществить $m + n$ различными способами.

Комбинаторное правило умножения. Пусть имеется два конечных множества A и B. Предположим, что элемент a из множества A можно выбрать m различными способами и после этого элемент b из множества B можно выбрать n различными способами. Тогда число вариантов выбора пары (a, b) равно mn.

Доказательство. Пусть, как и выше, элемент a выбирается из множества $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, а элемент b выбирается из множества $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Тогда два элемента a и b образуют упорядоченную пару (a, b), являющуюся элементом декартова произведения множеств A и B. В следующей таблице приведены все элементы множества $A \times B$:

$A \setminus B$	b_1	b_2	$\cdots$	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\cdots$	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_2, b_n)
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	$\cdots$	(a_m, b_n)

Очевидно, что число элементов в множестве $A \times B$ равно mn.

Комбинаторные правила сложения и умножения могут быть обобщены для нескольких множеств.

Пример 4.9. В группе из 25 студентов нужно выбрать старосту и заместителя старосты. Подсчитаем количество способов, которыми это можно сделать. Выбор двух студентов можно осуществить последовательно, выбрав сначала старосту, а затем заместителя старосты. Ясно, что старосту нужно выбирать из всех студентов, а заместителя — из оставшихся. Значит старосту можно выбрать 25 различными способами, а заместителя старосты — только 24. Поскольку выбирается два человека, а не один, то следует воспользоваться правилом умножения. Таким образом, количество способов равно $25 \cdot 24 = 600$.

Пример 4.10. Подсчитаем количество трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр равна 0. Очевидно, что первая цифра не может быть равна нулю. Значит нулевой может быть либо только вторая цифра, либо только третья, либо одновременно вторая и третья цифры. Таким образом, множество трехзначных натуральных чисел мы разбили на три попарно непересекающихся подмножества: M_1 — множество трехзначных чисел, у которых только вторая цифра нулевая; M_2 — множество трехзначных чисел, у которых только третья цифра нулевая; M_3 — множество трехзначных чисел, у которых вторая и третья цифры нулевые. Остается подсчитать количество чисел в каждом из этих подмножеств. Числа из множества M_1 имеют вид $a0b$. Каждая из букв a и b может принимать независимо друг от друга по 9 ненулевых значений: $1, 2, \ldots, 9$. Применяя правило умножения получим 81 число в множестве M_1. Числа из множества M_2 имеют вид $ab0$ и их количество вычисляется аналогично: $9 \times 9 = 81$. Числа из множества M_3 имеют вид $a00$ и их количество очевидно равно числу 9. Применяя теперь обобщенное правило сложения, находим общее количество чисел: $81 + 81 + 9 = 171$.

Перейдем к рассмотрению основных комбинаторных конструкций.

4.2 Перестановки.

Пусть множество M состоит из n элементов: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Выберем элементы множества M в каком-нибудь порядке и разместим их друг за другом:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}). \tag{8}$$

Будем называть такую последовательность *перестановкой из n элементов.*

Пример 4.11. Пусть $M = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим всевозможные перестановки, которые можно составить из элементов множества M:

$$\begin{array}{ccc} (1,2,3), & (2,1,3), & (3,1,2), \\ (1,3,2), & (2,3,1), & (3,2,1). \end{array}$$

Обозначим число всех перестановок из n элементов через P_n. Тогда из примера 11 следует, что $P_3 = 6$. Заметим, что $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Обозначим произведение $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ через $n!$ (читается «эн факториал») и докажем общий факт.

Теорема 4.1 $P_n = n!$.

Доказательство. Воспользуемся обобщенным правилом произведения. Для создания перестановки (8) выбираем сначала элемент a_{i_1} из множества M, затем элемент a_{i_2} из множества $M \setminus \{a_{i_1}\}$ и так далее. Число способов выбора элемента a_{i_1} равно числу элементов в множестве M, то есть числу n. Далее с каждым шагом число способов уменьшается на единицу. Последний элемент a_{i_n} может быть выбран единственным способом. Применяя обобщенное правило произведения получим, что число всех перестановок на множестве M равно произведению $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$.

Пример 4.12. Все клеточки таблицы, состоящей из трех строк и трех столбцов, раскрашиваются красками девятью различных цветов. Подсчитаем количество вариантов раскраски таблицы. Нетрудно представить себе, что это количество равно числу всех наборов из девяти данных красок. Поскольку все цвета различны, то это количество равно числу $P_9 = 9! = 362880$.

4.3 Размещения.

Пусть множество M состоит из n элементов: $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Выберем из множества M любые m элементов ($m \leqslant n$) и разместим их в каком-нибудь порядке:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}). \tag{9}$$

Будем называть такую последовательность *размещением из n элементов по m*.

Пример 4.13. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим всевозможные размещения, которые можно составить из двух элементов, выбранных из множества M:

$$\begin{matrix} (1,2), & (2,1), & (3,1), & (4,1), \\ (1,3), & (2,3), & (3,2), & (4,2), \\ (1,4), & (2,4), & (3,4), & (4,3). \end{matrix}$$

Обозначим число всех размещений из n элементов по m через A_n^m. Тогда из примера 13 следует, что $A_4^2 = 12$. Заметим, что $12 = 4 \cdot 3$. Докажем общий факт.

Теорема 4.2 $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$.

Доказательство этой теоремы можно провести аналогично доказательству теоремы 4.1. Отличие будет состоят в том, что последний элемент в размещении (9) выбирается не одним, а $(n-m+1)$ способом.

Следствие 4.1 $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Действительно,

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-m)\cdot(n-m+1)\cdot \cdots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot (n-m)} = \\ = n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-m+1).$$

Пример 4.14. Подсчитаем количество различных флагов, которые можно составить из трех горизонтальных полос, если имеется материал семи различных цветов. Очевидно, что два различных флага могут иметь либо разные наборы цветов, либо одинаковые, но тогда отличаться порядком их следования. Таким образом, важен состав полос и порядок их следования. Значит количество всевозможных флагов будет равно числу всех размещений из семи элементов по три, то есть числу $A_7^3 = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$.

Пример 4.15. Определим количество четырехзначных натуральных чисел, у которых все цифры различны. Пусть $abcd$ — десятичная запись такого числа. Зафиксируем значение буквы a, пусть, например, $a = 1$. Тогда значения остальных букв принадлежат множеству $\{0, 2, 3, \dots, 9\}$. Количество натуральных чисел вида bcd, у которых все цифры различны, равно числу всех размещений из девяти элементов по три, то есть числу $A_9^3 = 9\cdot 8\cdot 7 = 504$. Нам остается умножить это число на 9, чтобы получить окончательный ответ: $9\cdot 504 = 4536$.

4.4 Сочетания.

Пусть множество M состоит из n элементов: $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Выберем из множества M какие-нибудь m элементов ($m \leqslant n$) и разместим их в произвольном порядке:

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}\}.$$

Будем называть такой выбор *сочетанием из n элементов по m*. Очевидно, что сочетания из n элементов по m являются m-элементами подмножествами множества M.

Пример 4.16. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Рассмотрим всевозможные сочетания, которые можно составить из трех элементов, выбранных из множества M:

$$\begin{array}{llll} \{1,2,3\}, & \{1,3,4\}, & \{2,3,4\}, & \{3,4,5\}, \\ \{1,2,4\}, & \{1,3,5\}, & \{2,3,5\}, & \\ \{1,2,5\}, & \{1,4,5\}, & \{2,4,5\}. & \end{array}$$

Обозначим число всех сочетаний из n элементов по m через C_n^m. Тогда $C_5^3 = 10$. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.3 $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Доказательство. Согласно теореме 4.2 число всех размещений из n элементов по m равно $\dfrac{n!}{(n-m)!}$. Зафиксируем какие-нибудь m элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$. Число всех перестановок, составленных из этих элементов по теореме 4.1 равно $m!$. Все эти перестановки образуют $m!$ размещений, составленных из элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, и все они соответствуют одному сочетанию, так как образуют одно подмножество. Следовательно, чтобы получить общее число сочетаний из n элементов по m, нужно разделить число всех размещений A_n^m на число всех перестановок P_m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Следствие 4.2 $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$.

Пример 4.17. Подсчитаем сколькими способами можно составить набор из 6 карт, вытягивая их из колоды, содержащей 36 карт. Прежде всего заметим, что два различных набора отличаются друг от друга только составом, а не порядком следования карт друг за другом. Значит, каждый набор — это есть сочетание (а не размещение). Таким образом, общее число таких наборов равно числу сочетаний из 36 по 6: $C_{36}^6 = \dfrac{36!}{6!30!} = 1947792$.

Пример 4.18. В одной компании встретились 10 друзей и обменялись рукопожатиями. Сосчитаем количество всех рукопожатий. Каждое рукопожатие осуществляется двумя друзьями, следовательно, количество рукопожатий равно числу пар, которые можно составить из 10 человек. Это число равно числу сочетаний из 10 по 2: $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$.

Сочетания C_n^k входят в формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n \qquad (10)$$

и называются *биномиальными коэффициентами*. Биномиальные коэффициенты обладают целым рядом свойств. Приведем некоторые из них

Свойство 4.1 $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Свойство 4.2 $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Свойство 4.3 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Свойства 4.1 и 4.2 очевидны. Свойство 4.3 вытекает из формулы (10) при $a = b = 1$.

Воспользуемся свойством 4.3 для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4.4 *Если множество M состоит из n элементов, то число его подмножеств равно 2^n.*

Доказательство. Множество всех подмножеств $B(M)$ множества M можно разбить на подмножества $B_0, B_1, \ldots, B_n$, где B_k — подмножество, состоящее из всех k-элементных подмножеств множества M. Например, если $M = \{1, 2, 3\}$, то

$$B_0 = \{\varnothing\}, B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, B_2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, B_3\{\{1, 2, 3\}\}.$$

Число элементов в подмножестве B_k равно числу сочетаний из n по k, то есть числу C_n^k, а число всех подмножеств множества M равно сумме $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$, которая согласно свойству 4.3 равна числу 2^n.

4.5 Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте основные комбинаторные правила.
2. Дайте понятие перестановки, заданной на множестве.
3. Дайте понятие размещения из n элементов по k.
4. Дайте понятие сочетания из n элементов по k.
5. Приведите формулы для вычисления чисел P_n, A_n^k, C_n^k.

4.6 Упражнения

1. Учитель рисования на уроке дал задание своим ученикам нарисовать радугу. Можно ли с уверенностью утверждать, что хотя бы один из учеников изобразит радугу с правильным расположением цветов?
2. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две одинаковые цифры?
3. Сколько трехзначных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3?

4. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

5. Восемь монет различного достоинства нужно раздать восьми людям. Сколькими способами это можно сделать?

6. Сколько различных букетов, состоящих из семи цветков можно составить, если имеются цветы только двух видов?

7. Сколькими способами можно рассадить пять человек за круглым столом?

8. Сколько различных команд, состоящих из трех юношей и трех девушек можно составить, если имеется 5 юношей и 4 девушки?

9. Сколько различных наборов, состоящих из четырех карт разных мастей, можно составить из полной колоды карт?

10. Сколько всего шахматных партий будет сыграно между 12 игроками, если каждый игрок сыграет с каждым из остальных по одной партии?

11. Сколькими способами можно разместить 5 книг на трех полках?

12. Туристическая компания предлагает жителям города A экскурсию в город B, причем поездка в B и возвращение обратно происходят по разным дорогам. Сколько различных вариантов экскурсий может предложит туристическая компания, если между городами A и B имеется 10 дорог?

13. Сколькими способами можно раскрасить куб, если каждая грань куба красится в один из четырех цветов.

14. Из двух спортивных сообществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами это можно сделать?

15. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

16. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова "камзол"? То же самое из слова "здание".

17. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с неё? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по разным путям?

18. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

19. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургеньева “Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо” и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

20. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

21. Из группы состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2 женщин. Сколькими способами это можно сделать?

22. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров (надо использовать все 7 бусинок)?

23. Из пункта в пункт ведут 6 дорог. Сколькими способами велосипедист может доехать из пункта в пункт и вернуться обратно? Сколькими способами он может совершить поездку из в и вернуться обратно по другой дороге?

24. Сколько четырехзначных телефонных номеров можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6? Сколько таких номеров оканчивается четной цифрой?

25. На книжной полке произвольным образом расставляются 10 томов собрания сочинения. Сколькими способами это можно сделать? Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы 1-й и 2-й том стояли рядом? Чтобы 10-й том стоял с краю?

26. Сколькими способами можно составить одну танцевальную пару из 5 юношей и 6 девушек, если танцуют девушка с юношей? Сколькими способами можно составить две такие танцевальные пары?

27. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются четырехзначные числа.

    (a) Сколько всего таких чисел можно составить?

    (b) Сколько чисел среди составленных делятся на 5?

(c) Сколько чисел среди составленных начинаются двойкой и заканчиваются пятеркой?
(d) Сколько четырехзначных чисел, в записи которых цифры не повторяются, можно составить из данных цифр?
(e) Сколько четырехзначных чисел, в записи которых цифры не повторяются, оканчиваются ненулевой цифрой?

28. В вазе 10 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно выбрать из вазы 3 фрукта? Сколькими способами можно выбрать 4 фрукта так, чтобы яблок в этом выборе было больше чем груш?

29. В студенческой группе 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать трех дежурных? Сколькими способами в группе можно выбрать старосту, заместителя старосты и профорга?

30. Сколько автомобильных номеров содержащих две буквы и 3 цифры можно составить из букв А, Б, В, Г, Д и цифр 1, 2, 3, 4? Сколько таких автомобильных номеров можно составить так, чтобы буквы в номере не повторялись?

31. Сколько диагоналей имеет выпуклый 10-угольник?

32. На конференции должны выступить четыре оратора: А, Б, В,Г.
(a) Сколькими способами можно составить список выступлений ораторов?
(b) Сколькими способами можно составить списки, в которых А и Б выступают непосредственно друг за другом?
(c) Сколькими способами можно составить списки, в которых Б выступает после А?

33. Сколькими способами можно выбрать из колоды карт (36 карт) четыре карты так, чтобы это были две шестерки и две семерки? Сколькими способами можно выбрать 4 карты так, чтобы шестерок в этом выборе было не меньше, чем семерок?

5 Алгебра случайных событий

5.1 О предмете теории вероятностей

В 1494 году итальянский математик Л. Пачиоли в своей опубликованной работе рассматривал задачу, связанную с разделением ставки выигрыша. Суть задачи заключалась в следующем: два игрока играют в кости. Побеждает тот, кто первым выиграет m партий. После того, как один из них выиграл k партий, а второй выиграл l партий, причем числа k и l оказались меньше m, игра была закончена. Возникает вопрос: как поделить выигрыш? Сам Пачиоли и позднее Д. Кардано, рассматривавший эту задачу, не смогли найти правильного решения. Лишь только в 1654 году эта задача была полностью решена двумя французскими математиками Б. Паскалем и П. Ферма. В своей переписке эти два математика заложили основы теории вероятностей (ввели понятия вероятности и математического ожидания). Существенный вклад в развитие теории вероятностей внесли в разное время Я. Бернулли ($1654 - 1705$), А. Муавр ($1667 - 1754$), П. Лаплас ($1749 - 1827$), К. Гаусс ($1777 - 1855$), С. Пуассон ($1781 - 1840$), а так же наш соотечественник П.Л. Чебышев ($1821 - 1894$) и его ученики А.А. Марков ($1856 - 1922$), А.М. Ляпунов ($1911 - 1973$). Аксиоматическое построение теории вероятностей было получено А.Н. Колмогоровым ($1903 - 1987$). В настоящее время теория вероятностей является одной из развивающихся математических дисциплин. На ее основе появились и стали самостоятельными новые направления в науке: математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, экономическое моделирование и др. В последнее время широко используются статистические методы исследований в социологии, психологии, литературоведении, истории.

Теория вероятностей изучает закономерности случайных событий, то есть событий, о которых заранее невозможно точно сказать наступят они или нет. При этом рассматриваются только такие случайные события, которые могут возникать в результате действий, многократно воспроизводимых в одних и тех же условиях. Например, подбрасывание монеты, бросание игрального кубика, стрельба по мишени в тире — испытания многократно повторяемые в одних и тех же условиях. Победа конкретного кандидата на выборах — тоже случайное событие. Однако такое событие не является объектом изучения теории вероятностей, поскольку сохранить все условия при повторении выборов вряд ли возможно. Именно, благодаря возможности многократного воспроизведения удается обнаружить закономерности, которым подвержены случайные события. Например, если подбрасывать монету большое количество раз (и такие испытания проводились), то можно обнаружить, что число выпадений герба примерно равно числу выпадений решки.

5.2 Случайные события и их классификация

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайного события. Прежде, чем сформулировать его определение, примем одно соглашение. Любое событие является результатом некоторого действия (измерения, наблюдения и т. д.). Это действие мы будем называть экспериментом и обозначать его буквой E.

Пусть в результате некоторого эксперимента E может произойти событие A. Событие A будем называть *случайным*, если заранее до проведения эксперимента E нельзя определить точно произойдет оно или нет.

Примеры случайных событий: выпадение герба при бросании монеты, выпадении пяти очков при бросании игрального кубика, попадание в цель при стрельбе по цели. Следует четко представлять себе, что любое случайное событие не наступает произвольно, а является следствием воздействия многих факторов. Например,то что монета при подбрасывании выпадет гербом вверх зависит от ее первоначального положения, от места соприкосновения с большим пальцем, от приложенной к ней силы и целого ряда других причин. Воздействие каждого фактора в отдельности на конечный результат ничтожно и вряд ли может быть учтено заранее.

Случайные события будем обозначать заглавными латинскими буквами (с индексами и без индексов) и для краткости называть их просто событиями. Приведем еще два определения.

Событие A будем называть *достоверным*, если оно обязательно происходит в результате эксперимента. Событие A будем называть *невозможным*, если оно никогда не происходит в результате эксперимента. Достоверное событие будем обозначать буквой U, а невозможное – буквой V. Приведем примеры достоверных и невозможных событий. Пусть эксперимент E заключается в вытягивании карты из колоды карт. Тогда достоверным событием будет то, что вытянутая карта будет картой одной из следующих мастей: $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, а невозможным то, что она окажется картой масти $\square$. В этом же эксперименте примером достоверного события является то, что вытянутая карта будет черной или красной масти, а примером невозможного события то, что она окажется картой желтой масти.

Со всяким экспериментом, как мы видим, можно связать множество разных случайных событий. События в этом множестве могут по разному соотносится друг с другом. Будем называть два случайных события *совместными,* если они могут произойти одновременно. Наоборот, если наступление одного события исключает наступление другого, то такие события будем называть *несовместными.* Например,при бросании игрального кубика совместными будут следующие два события: выпадение четного числа очков и выпадение четырех очков, а несовместными — выпадение одного очка и выпадение двух очков. Будем говорить, что событие A *благоприятствует* событию B, если при наступлении события A наступает и событие B. Например, если при бросании кубика выпало четыре очка (событие A), то выпало четное число очков (событие B). Среди различных множеств случайных событий, связанных с данным экспериментом, наибольший интерес представляют полные группы попарно несовместных событий. Сформулируем определение.

Определение 5.1 Пусть в результате эксперимента E могут наступить случайные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем говорить, что эти события образуют *полную группу попарно несовместных событий,* если они удовлетворяют следующим двум условиям:

1. В результате эксперимента E хотя бы одно из этих событий обязательно наступает.

2. Никакие два из них не могут наступить одновременно.

Примером полной группы попарно несовместных событий при бросании игрального кубика являются шесть событий $B_1, B_2, \ldots, B_6$, где B_i — событие, заключающееся в выпадении i очков.

5.3 Действия со случайными событиями

Пусть в результате некоторого эксперимента E может наступить случайное событие A. Это событие до проведения эксперимента мы воспринимаем как предположение: «Произойдет событие A», а после проведения эксперимента — уже как высказывание: «Произошло событие A». Как мы знаем из простых высказываний с помощью логических связок можно образовывать сложные высказывания. Используя логические связки, определим несколько операций над случайными событиями.

Определение 5.2 *Суммой* двух случайных событий A и B называется случайное событие A или B, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из этих событий.

Сумму событий A и B принято обозначать через $A + B$.

Пример 5.19. Пусть эксперимент E заключается в бросании игрального кубика. Рассмотрим два случайных события:

A: Выпадет два очка.

B: Выпадет три очка.

Тогда событие $A + B$ будет: Выпадет два или три очка.

Определение 5.3 *Произведением* двух случайных событий A и B называется случайное событие A и B, которое наступает тогда и только тогда, когда оба события наступают одновременно.

Произведение событий A и B обозначается через: AB. В предыдущем примере событие AB будет: Выпадет два и три очка. Очевидно, что это — невозможное событие.

Определение 5.4 Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A если оно наступает тогда и только тогда, когда событие A не наступает.

Например, при бросании монеты два события «Выпадет решка» и «Выпадет герб» противоположны друг другу, а события A и B из предыдущего примера — нет.

Перечислим основные свойства введенных операций над случайными событиями. Эти свойства легко вытекают из определений операций и соответствующих свойств логических операций. Пусть A, B, C — произвольные случайные события.

1. $A + A = A$; $AA = A$.

2. $A + B = B + A$; $AB = BA$.

3. $A + (B + C) = (A + B) + C$; $A(BC) = (AB)C$.

4. $A(B + C) = AB + AC$.

5. $\overline{A + B} = \overline{AB}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

6. $\overline{\overline{A}} = A$.

7. $A + \overline{A} = U$.

8. $A\overline{A} = V$.

9. $A + U = U$.

10. $AU = A$.

11. $A + V = A$.

12. $AV = V$.

Используя эти свойства можно получать новые факты. В качестве примера докажем теорему, позволяющую заменять сумму двух произвольных событий суммой двух нсовместных событий.

Теорема 5.1 *Пусть A и B — произвольные случайные события. Тогда*

$$A + B = A + \overline{A}B. \tag{11}$$

Доказательство.

$$A + B \overset{10}{=} A + BU \overset{7}{=} A + B(A + \overline{A}) \overset{4}{=} A + (BA + B\overline{A}) \overset{3}{=}$$
$$(A + BA) + B\overline{A} \overset{2}{=} (A + AB) + \overline{A}B \overset{10}{=} (AU + AB) + \overline{A}B \overset{4}{=}$$
$$A(U + B) + \overline{A}B \overset{2}{=} A(B + U) + \overline{A}B \overset{9}{=} AU + \overline{A}B \overset{10}{=} A + \overline{A}B.$$

Числа, стоящие над знаками равенства, означают номера примененных свойств.

Используя операции над случайными событиями и свойства операций, мы можем из нескольких случайных событий получать новые случайные события. Естественно при этом новые события считать *сложными* случайными событиями. На практике часто (в частности, при вычислении вероятностей) приходится решать обратную задачу, а именно представить данное сложное событие в виде комбинации (то есть в виде суммы или произведения) нескольких более простых случайных событий. Ясно, что такой процесс преобразования может быть доведен до простейших событий, то есть до событий, для которых уже не требуется дальнейших преобразований. Такие простейшие случайные события будем называть *элементарными событиями (элементарными исходами.)* Приведем пример. При бросании игрального кубика могут произойти два случайных события:

A: Выпадет одно очко.

$\overline{A}$: Выпадет более одного очка.

Ясно, что событие A является элементарным случайным событием. Событие $\overline{A}$ не является элементарным, так как может быть представлено в виде суммы пяти элементарных событий: $\overline{A} = B_2 + \cdots + B_6$, где B_i — выпадение i очков при бросании кубика.

5.4 Вопросы для самопроверки

1. Какое событие называется случайным? Приведите примеры.
2. Какое случайное событие называется достоверным (невозможным)? Приведите примеры.
3. Что значит, что событие A благоприятствует событию B? Приведите примеры.
4. Какие события образуют полную группу попарно несовместных событий? Приведите примеры.
5. Что называется суммой двух случайных событий? Приведите примеры.

6. Что называется произведением двух случайных событий? Приведите примеры.

7. Какое событие называется противоположным данному событию? Приведите примеры.

8. Перечислите основные свойства, которыми обладают операции над случайными событиями.

9. Что понимается под элементарным событием?

5.5 Упражнения

1. Назовите несколько случайных событий, которые могут произойти при сдаче экзамена.

2. Назовите каких-нибудь два совместных случайных события, которые возникают при бросании игрального кубика.

3. Назовите каких-нибудь два несовместных случайных события, которые возникают при бросании двух игральных кубиков.

4. Пусть монета подбрасывается дважды. Какие случайные события будут образовывать полную группу попарно несовместных событий?

5. Назовите каких-нибудь два противоположных случайных события, которые возникают при бросании игрального кубика.

6. Монета подбрасывается три раза. Составьте из следующих случайных событий пары, в которых первое событие благоприятствует второму:

   A : Герб выпал не менее двух раз.

   B : Герб выпал один раз.

   C : Решка выпала более одного раза.

   D: Решка не выпала ни разу.

7. Два стрелка стреляют не зависимо друг от друга по мишени по одному разу. Представьте следующие случайные события в виде суммы или произведения двух событий:

   (a) Мишень не поражена.

   (b) Мишень поражена одним стрелком.

   (c) Мишень поражена двумя стрелками.
   (d) Мишень поражена.

8. Бросается игральный кубик. События A — выпадение 1, 2 или 3 очков; B - выпадение чётного числа очков. Опишите события:
   (a) $A+B$;
   (b) AB;
   (c) $\overline{A}$;
   (d) $\overline{B}$.

9. Пусть элементарное событие A - по дороге из института домой встретилась черная кошка, а B - встретилась злая собака. Описать словами следующие события:
   (a) $A+B$;
   (b) $\overline{A}+\overline{B}$;
   (c) $A\cdot B$;
   (d) $\overline{A}\cdot\overline{B}$;
   (e) $\overline{A}$;
   (f) $\overline{B}$.

6 Различные способы определения вероятности

6.1 Относительная частота случайного события

Пусть случайное событие A может наступить в результате некоторого эксперимента E. Предположим, что эксперимент E повторен n раз и в результате оказалось, что событие A наступило в m случаях ($m \leqslant n$). Тогда величина

$$p(A)=\frac{m}{n} \tag{12}$$

называется *относительной частотой* случайного события A. Эта величина носит усредненный характер. Она не говорит о регулярности наступления события A, но по ее значению можно сделать вывод о том как часто наступало бы событие A, если бы оно появлялось с одинаковой периодичностью.

Пример 6.20. Предположим, что стрелок произвел 10 выстрелов по мишени и поразил ее 7 раз. Тогда относительная частота попадания равна $\frac{7}{10}$. Понятно, что в другой серии выстрелов у этого же стрелка относительная частота попадания может оказаться иной. Таким образом, относительная частота всегда связана с проводимым экспериментом, вычисляется после его проведения и может изменяться. Несмотря на это относительная частота имеет важное значение. Перечислим несколько общих свойств относительной частоты.

1. $p(V) = 0$;
2. $p(U) = 1$;
3. $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$ для любого случайного события A;
4. $p(A + B) = p(A) + p(B)$ для любых несовместных событий A и B.

Первые три свойства непосредственно вытекают из определения относительной частоты. Докажем последнее свойство. Пусть в результате проведенных n испытаниях события A и B наступили k и m раз соответственно. Тогда, если эти события несовместны, то

$$p(A + B) = \frac{k + m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = p(A) + p(B). \tag{13}$$

6.2 Статистическая вероятность случайного события

Как уже было отмечено выше, при многократном повторении испытаний обнаруживаются закономерности, которым подчинены случайные события. Пусть случайное событие A может появиться в результате эксперимента E. Проведем наблюдение за изменением относительной частоты события A. Для этого будем повторять эксперимент E многократно (n раз) и после каждого его повторения будем вычислять относительную частоту $p(A)$ события A. Очевидно, что при $n = 0$ значение относительной частоты тоже равно нулю. При $n = 1$ относительная частота может принять одно из двух значений: 0 или 1, а при $n = 2$ — уже одно из трех: 0, $\frac{1}{2}$ или 1, и так далее. Наблюдение за изменениями относительной частоты удобно провести с помощью графика. Для этого по горизонтальной оси будем откладывать значения переменной n, а по вертикальной оси — значения относительной частоты $p(A)$. Тогда график будет состоять из отдельных точек (см. рисунок. 10)

Если окажется, что по мере увеличения числа испытаний значение относительной частоты приближается к некоторому числу, то это число называют *статистической вероятностью* случайного события A и обозначают его через

Рис. 10.

$P^*(A)$. То что относительная частота случайного события начинает стабилизироваться можно заметить с помощью графика (это отражено на рисунке 10). Для обнаружения статистической вероятности требуется проведения большого количества испытаний и неизменности начальных условий. Так для выявления статистической вероятности выпадений герба монета подбрасывалась 24000 раз. Герб выпал в 12012 случаях[2]. За статистическую вероятность выпадения герба принята $\frac{1}{2}$. Статистическая вероятность всегда носит приближенный характер и используется в тех случаях, когда другие вероятности не могут быть определены. Например, статистика показывает, что на 1000 новорожденных приходится примерно 518 мальчиков, а значит статистическая вероятность рождения мальчика равна 0,518, а не 0,5 как казалось бы должно быть. Отметим, что статистическая вероятность обладает свойствами $1-4$, которыми обладает и относительная частота.

6.3 Классическое определение вероятности

Представим себе двух игроков, которые поочередно бросают по два игральных кубика, предварительно сделав ставку на число, равное сумме выпавших очков. Выигрывает естественно тот, кто угадает. Попробуем выяснить на какое число выгоднее сделать ставку. Ясно, что значение суммы выпавших очков находится в пределах от двух до двенадцати. Казалось бы на первый взгляд неважно, какое из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 загадывать. Однако нетрудно заметить, что сумму 2 можно получить только одним способом: 2=1+1, а сумму 3 уже двумя способами: 3=1+2 и 3=2+1. Следовательно, наиболее вероятнее то из чисел, которое имеет максимальное количество различных способов разложения

[2] Данные взяты из книги [1]

его в сумму выпавших очков. Предлагаем читателю убедиться в том, что таким числом является число 7. Итак, проделав несложные вычисления до начала игры, можно количественно оценить шансы на успех и сделать правильный ход. На этом простом примере мы видим, что некоторые случайные события могут иметь предпочтения перед другими, а значит не быть *равновозможными.* Примерами равновозможных событий являются выпадение герба и выпадение решки при подбрасывании монеты, шесть событий $B_1, B_2, \ldots, B_6$, где B_i — выпадение i очков, при бросании игрального кубика.

Определение 6.1 Пусть эксперимент E может быть неограниченно повторяем при одних и тех же начальных условиях. Назовем эксперимент E *классическим,* если в результате его могут наступить элементарные случайные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

- события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий;
- все события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ равновозможны.

Примерами классических экспериментов являются:

1. Подбрасывание монеты. Элементарные исходы: B_1 : Выпал герб, B_2 : Выпала решка.
2. Бросание игрального кубика. Элементарные исходы: $B_1, \ldots, B_6$, где B_i : Выпало i очков.
3. Вытягивание карты из колоды.

А вот примеры экспериментов, не являющихся классическими:

1. Сдача экзамена. В качестве элементарных исходов рассматриваются следующие события:

   B_1 : экзамен не сдан;

   B_2 : экзамен сдан на «удовлетворительно»;

   B_3 : экзамен сдан на «хорошо»;

   B_4 : экзамен сдан на «отлично»;

2. Наблюдение за пролетающими мимо окна воронами. В качестве элементарных исходов рассматриваются следующие события:

   B_1 : Ворона пролетела;

   B_2 : Ворона не пролетела.

3. Выборы президента.

Определение 6.2 Пусть случайное событие A может наступить в результате классического эксперимента E. *Вероятностью случайного события* A называется число

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{14}$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, а n — число всех элементарных исходов.

Обратимся к примерам.

Пример 6.21. Очевидно, что вероятности выпадения герба и выпадения решки при одном подбрасывании монеты одинаковы и равны $\frac{1}{2}$. Подсчитаем вероятность выпадения двух гербов при двух подбрасываниях монеты (событие A). Для этого необходимо найти множество элементарных исходов. Обозначим для краткости выпадение герба буквой Г, а вероятность выпадения решки — буквой Р. Тогда следующие события: ГГ, ГР, РГ, РР очевидно составляют множество всех элементарных исходов, из которых событию A благоприятствует только одно — событие ГГ. Значит вероятность выпадения двух гербов при двух бросаниях монеты равна $\frac{1}{4}$.

Пример 6.22. При одном бросании кубика может выпасть от одного до шести очков. Все соответствующие события равновозможны и образуют полную группу попарно несовместных событий. Следовательно, вероятность выпадения какого-то конкретного количества очков при одном бросании кубика равна $\frac{1}{6}$. При двух бросаниях кубика количество элементарных исходов равно 36. Действительно, каждый элементарный исход однозначно определяется парой чисел (a, b), где a — количество выпавших очков при первом бросании и b — количество выпавших очков при втором бросании. Количество таких пар согласно комбинаторному правилу произведения равно $6 \times 6 = 36$. Найдем вероятность выпадения семи очков в сумме при двух бросаниях кубика. Для этого найдем количество элементарных исходов, благоприятствующих этому событию. Представим число 7 в виде суммы двух натуральных чисел от 1 до 6: $7 = 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1$. Таким образом, выпадению семи очков при двух бросаниях кубика благоприятствует 6 элементарных исходов, а значит вероятность этого события равна $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Пример 6.23. Рассмотрим более сложный пример. Из урны, содержащей 8 белых и 3 черных шара наугад извлечены три шара. Определим вероятность того, среди них окажется 2 белых шара и один черный шар. Найдем сначала общее количество элементарных исходов. В данном случае эксперимент заключается в выборе трех шаров из одиннадцати. Так как важен только состав шаров,а порядок не важен, то мы имеем дело с сочетаниями. Следовательно, общее количество всех элементарных исходов равно числу сочетаний C_{11}^3. Согласно теореме 4.3 $C_{11}^3 = \dfrac{11!}{3!8!} = 165$. Теперь подсчитаем число благоприятствующих исходов. Два белых шара мы можем выбрать только из восьми белых шаров. Это можно сделать $C_8^2 = 28$ способами. Один черный шар мы можем выбрать из трех имеющихся черных шаров тремя способами. Чтобы получить общее число всех благоприятствующих исходов остается перемножить эти числа: $28 \times 3 = 84$. Таким образом, искомая вероятность равна $\dfrac{84}{165} = \dfrac{28}{55} \approx 0,51$.

Определения относительной частоты и вероятности схожи между собой (сравните формулы (12) и (14)). Принципиальное отличие между ними состоит в том, что относительная частота вычисляется только после проведения эксперимента, а вероятность может быть расчитана до его проведения. Если вероятность случайного события известна, то она может быть учтена при проведении эксперимента. Малое значение вероятности $P(A)$ (близкое к нулю) говорит о том, что событие A скорей всего не наступит. И наоборот, большое значение вероятности $P(A)$ (близкое к единице) говорит о том, что событие A скорей всего произойдет. Однако, не следует забывать о том, что мы имеем дело со случайными событиями и потому какой бы высокой ни была вероятность $P(A)$, если $P(A) \neq 1$, то событие A может не наступить.

Вероятность обладает такими же общими свойствами, какими обладает относительная частота:

1. $P(V) = 0$;
2. $P(U) = 1$;
3. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого случайного события A;
4. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ для любых несовместных событий A и B.

Все эти свойства непосредственно вытекают из определения вероятности. Между относительной частотой и вероятностью существует глубокая взаимосвязь, которая была обнаружена швейцарским математиком Я. Бернулли (1654–1705). Суть его открытия заключается в том, что при увеличении числа испытаний относительная частота $p(A)$ становится устойчивой, приближаясь по своему значению к вероятности $P(A)$. Этот факт позволяет в тех случаях, когда вероятность случайного события постоянна, но неизвестна, применять вместо нее относительную частоту.

Последнее из приведенных свойств можно обобщить следующим образом:

Теорема 6.1 *Пусть случайные события* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместны. Тогда*

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть число событий, благоприятствующих событию A_i, равно m_i, а число всех элементарных исходов равно k. Тогда событию $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ благоприятствует $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ событий и потому

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{k} = \\ = \frac{m_1}{k} + \frac{m_2}{k} + \cdots + \frac{m_n}{k} = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

6.4 Геометрические вероятности

Одним из существенных обстоятельств, ограничивающих применение вероятности, является то, что она применима к экспериментам с конечным числом элементарных исходов. В тех случаях, когда число элементарных исходов бесконечно, можно использовать *геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в некоторую область (отрезок, часть плоскости или пространства).

Пример 6.24. Пусть отрезок CD длины l находится внутри отрезка MN, имеющего длину L (см. рисунок 10).

Рис. 11.

Предположим, что точка T ставится произвольно на отрезок MN. То, что эта точка окажется на отрезке CD является случайным событием (пусть событием A). Ясно, что множества элементарных исходов и исходов, благоприятствующих событию A, бесконечны. Как определить вероятность события A? Понятно, что чем больше длина отрезка CD, тем выше вероятность попадания в него точки T. В предельном случае, когда $CD = MN$, эта вероятность будет равна 1. Естественно предположить, что вероятность попадания точки T на отрезок CD пропорциональна длине этого отрезка. Определим искомую вероятность с помощью формулы:

$$P(A) = \frac{l}{L}. \tag{16}$$

Пример 6.25. Пусть на плоскости задана некоторая область D, имеющая площадь S. Пусть внутри области D содержится другая область C с площадью s (см. рисунок 12). Предположим, что некоторая точка ставится произвольно в область D. Попадание точки в область C является случайным событием (событием A). Предполагая, что вероятность попадания точки в область C пропорциональна площади s, получим:

Рис. 12.

$$P(A) = \frac{s}{S}. \tag{17}$$

Если от плоского случая перейти к пространственному, то в предыдущем примере площади областей D и C нужно заменить на объемы V и v соответственно. Тогда формула (17) должна быть заменена формулой:

$$P(A) = \frac{v}{V}. \tag{18}$$

Рассмотрим задачу, которая может быть решена с помощью геометрической вероятности.

Задача о встрече. Два друга, договорились встретиться между 17 и 18 часами. При этом они условились о том, что каждый из них, придя на место встречи и не обнаружив товарища, ждет его в течение четверти часа. Найти вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Очевидно, что встреча друзей является случайным событием.

Обозначим это событие буквой A. Пусть x час — время прихода одного из друзей, а y час — время прихода второго. Так как встреча может произойти в течение часа, то не ограничивая общности рассуждений, можем считать, что

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases} \tag{19}$$

Построим на плоскости область, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют системе (19). Получился квадрат (см. рисунок 13), который является областью элементарных исходов. Перейдем теперь к определению области элементарных исходов,

Рис. 13.

благоприятствующих событию A. Легко видеть, что для того, чтобы встреча состоялась интервал между x и y не должен превышать $\frac{1}{4}$, то есть $|y-x| \leqslant \frac{1}{4}$. Последнее неравенство равносильно двойному неравенству

$$x - \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{4}. \tag{20}$$

В области элементарных исходов проведем две прямые $l_1 \;:\; y = x - \frac{1}{4}$ и $l_2 \;:\; y = x + \frac{1}{4}$ (см. рисунок 14). Из неравенств (20) следует, что область исходов, благоприятствующих событию A, находится между прямыми l_1 и l_2. Несложные вычисления показывают, что площадь этой области равна $7/16$. Так как площадь всего квадрата равна единице, то, применяя формулу (17), найдем искомую вероятность: $P(A) = 7/16 = 0,4375$.

Рис. 14.

6.5 Вопросы для самопроверки

1. Что называется относительной частотой случайного события?
2. Какими свойствами обладает относительная частота?
3. Какой эксперимент называется классическим?
4. Что называется вероятностью случайного события?
5. Какими свойствами обладает вероятность случайного события?
6. В чем принципиальное отличие вероятности от относительной частоты?
7. Что понимается под геометрической вероятностью?

6.6 Упражнения

1. Если опоздание на лекцию Вами есть случайное событие, то найдите его относительную частоту за последнюю неделю занятий.
2. Сдача экзамена студентом есть случайное событие. Почему нельзя утверждать, что его вероятность равна 0,5, ведь студент либо сдаст экзамен, либо не сдаст его?

3. Один человек загадал двузначное число, а другой пытается его угадать. Какова вероятность того, что он угадает?

4. Из колоды, содержащей 52 карты, взяты наугад три карты. Какова вероятность, того, что среди них окажутся тройка, семерка и туз?

5. В лотерее участвуют 100 билетов, из которых только 10 выигрышных. Какова вероятность того, что из двух купленных билетов оба билета выигрышные?

6. В окружность радиуса 2 м вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, поставленная наугад в круг, окажется в треугольнике.

7 Алгебра вероятностей

7.1 Вероятность произведения случайных событий

7.1.1 Условная вероятность

Пример 7.26. Пусть производится одно бросание игрального кубика. Рассмотрим два случайных события:

A: Число выпавших очков равно двум.

B: Число выпавших очков четно.

Очевидно, что вероятность события A равна $1/6$. Теперь предположим, что событие B наступило. Тогда число элементарных исходов равно трем (2, 4 или 6 очков). Следовательно, вероятность события A, вычисленная с учетом наступления события B, будет равна $1/3$. Вероятность одного случайного события, вычисленная в предположении, что другое случайное событие наступило, называется *условной вероятностью*. Условную вероятность события A в предположении, что событие B наступило, обозначают через $P(A/B)$, а также через $P_B(A)$. В предыдущем примере $P(A/B) = 1/3$. Если вероятность случайного события вычисляется без учета наступления каких-либо других случайных событий, то будем называть ее, когда это будет необходимо, *безусловной* вероятностью.

Напомним, что произведением двух случайных событий A и B называется событие AB, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события A и B. Докажем следующую теорему:

Теорема 7.1 *Пусть случайные события A и B могут наступить в результате классического эксперимента E. Тогда*

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть количество всех элементарных исходов, которые могут наступить в результате эксперимента E, равно n. Пусть далее случайным событиям A, B и AB благоприятсвуют m, k и l элементарных исходов соответственно. Ясно, что $l \leqslant m$ и $l \leqslant k$. Предположим, что событие B произошло. Это значит, что наступило одно из k благоприятствующих ему событий. Тогда событию A благоприятствует только l элементарных исходов, благоприятствующих событию AB. Следовательно,

$$P(A/B) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема доказана. Из этой теоремы вытекает несколько следствий.

Следствие 7.1 $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Следствие 7.2 $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

Последнее следствие ввиду важности сформулируем в виде теоремы:

Теорема 7.2 *Вероятность произведения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность второго события при условии, что первое событие произошло.*

Иногда требуется найти вероятность произведения нескольких событий. В таких случаях можно воспользоваться следующей формулой, которую мы приводим здесь без доказательства.

$$\begin{aligned} &P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = \\ &\qquad = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}). \quad (22) \end{aligned}$$

7.1.2 Независимые события

Определение 7.1 Будем говорить, что случайное событие A *не зависит* от случайного события B, если условная вероятность $P(A/B)$ равна безусловной вероятности $P(A)$.

Теорема 7.3 *Если случайное событие A не зависит от случайного события B, то случайное событие B не зависит от случайного события A.*

Доказательство. Если событие A является невозможным, то очевидно, что событие B не зависит от A. Предположим, что событие A может произойти. Тогда его вероятность $P(A)$ не равна нулю. Согласно следствию 7.2

$$P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A). \tag{23}$$

Пусть событие A не зависит от события B. Тогда $P(A/B) = P(A)$ и потому из равенства 23 следует, что

$$P(B)P(A) = P(A)P(B/A). \tag{24}$$

Разделив обе части равенства (24) на $P(A)$, получим равенство

$$P(B) = P(B/A),$$

которое означает независимость события B от события A. Теорема доказана.

Теорема 7.3 позволяет говорить о *независимых событиях,* то есть о таких двух случайных событиях, из которых одно не зависит от другого. Следующая теорема вытекает из теоремы 7.2:

Теорема 7.4 *Вероятность произведения двух независимых случайных событий равна произведению их вероятностей.*

Эта теорема может быть обобщена на случай нескольких случайных событий. Определим сначала одно важное понятие.

Определение 7.2 Будем говорить, что случайные события A_1, $A_2, \ldots$, A_n *независимы в совокупности,* если они попарно независимы и если каждое из событий не зависит от всевозможных произведений остальных событий.

Теорема 7.5 *Вероятность произведения нескольких независимых в совокупности случайных событий равна произведению их вероятностей.*

Рассмотрим примеры. Вернемся к примеру 21. При двух бросаниях монеты случайное событие A, заключающееся в выпадении двух гербов, является произведением двух независимых случайных событий: выпадение герба при первом бросании и выпадения герба при втором бросании. Следовательно, можно воспользоваться теоремой 7.4: $P(A) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Пример 7.27. Из урны, содержащей 9 белых и 4 черных шара, последовательно извлекаются три шара (шары не возвращаются на место). Найдем вероятность того, что все три шара окажутся белыми. Интересующее нас случайное событие является произведением трех случайных событий:

A_1: первый вынутый шар — белый;
A_2: второй вынутый шар — белый;
A_3: третий вынутый шар — белый;
Воспользуемся формулой (22):

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = \frac{9}{13}\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11} = \frac{42}{143}.$$

Пример 7.28. Рассмотрим задачу аналогичную предыдущей, но с условием, что шары каждый раз возвращают на место.

Воспользуемся теми же обозначениями. События A_1, A_2, A_3 теперь будут независимыми, поэтому

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{9}{13}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{9}{13} = \frac{729}{2197}.$$

7.2 Вероятность суммы случайных событий

Перейдем к вычислению вероятности суммы случайных событий. Ранее (см. стр. 60) мы отмечали, что вероятность суммы двух несовместных случайных событий равна сумме их вероятностей. Докажем теперь более общий факт.

Теорема 7.6 *Пусть A и B — произвольные случайные события. Тогда*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{25}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой 11, которая позволяет сумму любых случайных событий заменять суммой несовместных событий. Тогда

$$P(A+B) = P(A+\overline{A}B) = P(A) + P(\overline{A}B). \tag{26}$$

Далее $B = UB = (A+\overline{A})B = AB + \overline{A}B$. Ясно, что события AB и $\overline{A}B$ несовместны и поэтому $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$. Отсюда следует, что

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB). \tag{27}$$

Подставляя значение $P(\overline{A}B)$ из равенства (27) в равенство (26), получим формулу (25). Теорема доказана.

Следствие 7.3 *Если A и B — независимые случайные события, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B). \tag{28}$$

Пример 7.29. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятности поражения мишени ими соответственно равны 0,7 и 0,9. Найдем вероятность поражения мишени, если стрелки сделают по одному выстрелу.

Введем обозначения: A — первый стрелок поразил мишень, B — второй стрелок поразил мишень. Ясно, что мишень будет поражена тогда, когда хотя бы один из стрелков попадет в нее, то есть когда наступит событие $A + B$. Поскольку события A и B независимые, то можно воспользоваться формулой (28): $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = 0,7+0,9-0,7\cdot 0,9 = 1,6-0,63 = 0,97$.

В некоторых случаях, когда рассматривается вероятность наступления хотя бы одного из нескольких случайных событий, бывает удобнее переходить к противоположным событиям.

Теорема 7.7 *Если A и B — независимые случайные события, то*

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}). \tag{29}$$

Доказательство. Применяя свойства операций над случайными событиями, получим $A + B = \overline{(\overline{A})} + \overline{(\overline{B})} = \overline{(\overline{A})(\overline{B})}$. Далее воспользуемся очевидной формулой

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \tag{30}$$

из которой следует, что $P(A+B) = 1 - P((\overline{A})(\overline{B}))$. Нетрудно понять, что если события A и B независимы, то независимы и противоположные им события $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Поэтому $P((\overline{A})(\overline{B})) = P(\overline{A})P(\overline{B})$. Таким образом, $P(A+B) = 1-P(\overline{A})P(\overline{B})$. Что и требовалось доказать.

Вернемся к предыдущему примеру и воспользуемся этой теоремой. Сначала найдем вероятности промахов стрелков: $P(\overline{A}) = 1-0,7 = 0,3$ и $P(\overline{B}) = 1-0,9 = 0,1$. По формуле (29) получим $P(A+B) = 1 - 0,3\cdot 0,1 = 0,97$.

7.3 Формула полной вероятности

Задача 7.6. Имеется две урны с шарами. В первой урне содержится 4 белых и 5 черных шаров, а во второй — 6 белых и 3 черных шара. Из каждой урны не глядя вынули по одному шару, а затем из них наугад взяли один шар. Как узнать вероятность того, что этот шар окажется белым?

Рассмотрим решение этой задачи в общем виде.

Теорема 7.8 *Пусть случайное событие A может наступить в результате наступления одного из попарно несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, образующих полную группу. Тогда*

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n). \tag{31}$$

Формула (31) называется *формулой полной вероятности*.

Доказательство. Воспользуемся свойствами операций над случайными событиями:

$$A = UA = (B_1 + B_2 + \cdots + B_n)A = B_1A + B_2A + \cdots + B_nA.$$

Так как события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ попарно несовместны, то попарно несовместны и события $B_1A, B_2A, \ldots, B_nA$. Применяя формулу (15) получим сначала равенство

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + \cdots + P(B_nA),$$

а затем по теореме (7.2) и саму формулу (31). Теорема доказана.

Вернемся к задаче 6. Пусть A — событие, заключающееся в том, что вынутый шар окажется белым. Ясно, что событие A может наступить тогда и только тогда, когда вынутый шар будет из первой урны (событие B_1) или из второй урны (событие B_2). События B_1 и B_2 несовместны, равновозможны и образуют полную группу, поэтому можно воспользоваться формулой (31):

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2). \tag{32}$$

Очевидно, что $P(B_1) = P(B_2) = \dfrac{1}{2}$. Найдем условные вероятности: $P(A/B_1) = \dfrac{4}{9}$ и $P(A/B_2) = \dfrac{6}{9}$. Таким образом, имеем

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}.$$

7.4 Формула Байеса

Задача 7.7. Детали, изготовленные цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером, равна 0,94, в вторым — 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Рассмотрим решение этой задачи в общем виде. Пусть произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Определим как изменились (в связи с тем, что событие A уже наступило) вероятности гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$. Т.е. найдем условные вероятности

$$P(B_1/A), P(B_2/A), ..., P(B_n/A).$$

Найдем условную вероятность $P(B_1/A)$:

$$P(AB_1) = P(A)P(B_1/A) = P(B_1)P(A/B_1).$$

Откуда получаем, что

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}.$$

Подставив $P(A)$ из формулы (31), получим

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)}.$$

Аналогично выводятся формулы, для остальных гипотез. Доказана

Теорема 7.9 *Пусть случайное событие A наступило в результате одного из попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу. Тогда условная вероятность любой гипотезы B_i $(i = 1, 2, ..., n)$ моет быть вычислена по формуле*

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + ... + P(B_n)P(A/B_n)}. \qquad (33)$$

Формулы (33) называются *формулами Байеса*. Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Вернемся к задаче 7. Пусть A — годная деталь признана стандартной, B_1 — деталь проверил первый контролер, B_2 — деталь проверил второй контролер. Найдем вероятность того, что деталь проверил первый контролер, если она признана стандартной по формуле (33):

$$P(B_1/A)\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,94}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,59.$$

7.5 Формула Бернулли

Задача 7.8. Пусть монета подбрасывется 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно 6 раз? В этой задаче производится неоднократное повторение испытаний, в каждом из которых событие может появиться с постоянной вероятностью. Кроме этого, порядок, в котором выпадает герб, не учитывается.

Испытания с такими особенностями изучались Я. Бернулли. Опишем основные черты *схемы испытаний Я. Бернулли.*

Пусть эксперимент E многократно повторяется. Предположим, что в результате каждого испытания может появиться случайное событие A или противоположное ему событие $\overline{A}$. Кроме этого, будем предполагать, что вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от проведенных ранее испытаний. Обозначим через $P_n(k)$ вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях. Вычислить эту вероятность можно по следующей формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{34}$$

где p — вероятность наступления события A в каждом испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность наступления противоположного события $\overline{A}$. Формула (34) называется *формулой Бернулли.* Докажем эту формулу.

Пусть B — случайное событие, заключающееся в том, что в n испытаниях события A наступит k раз. Ясно, что B — сложное событие, а именно $B = B_1 B_2 \cdots B_n$, где каждое событие B_i есть одно из событий A или $\overline{A}$, причем событие A среди них встречается ровно k раз, а событие $\overline{A}$ — $n - k$ раз. Так как все события $B = B_1 B_2 \cdots B_n$ независимы в совокупности, то $P(B) = p^k q^{n-k}$. Легко понять, что количество таких событий B равно числу способов выбора из n элементов k элементов, то есть равно числу C_n^k. Умножив это число на вероятность $P(B)$, получим формулу (34).

Вернемся к задаче 8. Воспользуемся формулой Бернулли.

$$P_{10}(6) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{10!}{6!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{105}{512} \approx 0,205.$$

7.6 Вопросы для самопроверки

1. Что называется условной вероятностью случайного события? Как вычисляется условная вероятность?
2. Как вычисляется вероятность произведения двух случайных событий?
3. Какие два события называются независимыми?
4. Чему равна вероятность произведения независимых случайных событий?
5. Чему равна вероятность суммы двух случайных событий?
6. Приведите формулу полной вероятности.

7. Какие характерные признаки имеет схема испытаний Бернулли?
8. Приведите формулу Бернулли.

7.7 Упражнения

1. В урне имеется 25 пронумерованных шаров, одинаковых по размеру, но разных по цвету. Номера с первого по пятый имеют зеленые шары, а с шестого по двадцать пятый — красные шары. Из урны наугад вынут шар. Ответьте на следующие вопросы:
   (a) Какова вероятность того, что вынут шар с номером 4?
   (b) Какова вероятность того, что вынут шар с номером 4, если известно, что этот шар зеленый?
   (c) Какова вероятность того, что вынут шар с номером 4, если известно, что этот шар зеленый с четным номером?
2. Из колоды, содержащей 36 карт, вытянуто последовательно две карты. Какова вероятность того, что это будут король и туз пиковой масти?
3. Для участия в игре составляются команды по три человека. Для того, чтобы три человека могли составить команду им нужно знать ответы на пять вопросов. При отборе комиссия задает каждому участнику по одному вопросу. Какова вероятность того, что три друга составят команду, если они не знают ответа только на один из пяти вопросов программы?
4. В лотерее тиражом в 100 билетов только 30 билетов являются выигрышными. Какова вероятность того, что из двух купленных билетов хотя бы один билет выигрышный?
5. Какова вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика хотя бы один раз выпадет 6 очков?
6. Какое минимальное количество подбрасываний монеты нужно совершить, чтобы вероятность выпадения герба хотя бы один раз была не меньше 0,7?
7. Программа зачета по математике состоит из 25 задач. Для получения зачета достаточно решить одну из трех задач в билете. Какова вероятность того, что студент получит зачет, если он умеет решать только 20 задач?

8. Рыбак ловит рыбу на три различные наживки одновременно. Какова вероятность того, что он поймает рыбу, если вероятности ее появления около наживок соответственно равны 0,5, 0,6 и 0,7?

9. Два спортсмена, равные по силам, проводят серии состязаний между собой. Что вероятнее победить в серии из двух состязаний или в серии из четырех состязаний, если ничьи не принимаются во внимание?

10. Вероятность сделать ошибку в слове равна 0,1. Какова вероятность появления пяти ошибок в диктанте, содержащем 20 слов?

11. Решить задачу. На полке находится 10 книг, расставленных в произвольном порядке. Из них 3 книги по теории вероятностей, 3 - по математическому анализу и 4 - по линейной алгебре. Студент случайным образом достает одну книгу. Какова вероятность того, что он возьмет книгу по теории вероятностей или линейной алгебре?

    Решение.

    A: студент взял книгу по теории вероятностей; B: студент взял книгу по линейной алгебре. Необходимо найти $P(A + B)$. События и несовместны, поэтому искомая вероятность находится как сумма вероятностей

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{4}{10},\ P(A + B) = 0,3 + 0,4 = 0,7.$$

12. В аналитическом отделе фирмы 8 менеджеров и 12 финансистов. Для выполнения задания случайным образом из списка выбирают 3 человек. Найти вероятность того, что менеджеров среди них будет не менее одного.

    Решение:

    Пусть B_1: Среди выбранных 3-х человек один менеджер; B_2: Среди выбранных 3-х человек два менеджера; B_3: Среди выбранных 3-х человек три менеджера. Обозначим событие B: Среди выбранных 3-х человек будет не менее одного менеджера$=B_1 + B_2 + B_3$. События B_1, B_2, B_3 несовместные, значит, по теореме сложения вероятностей:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_2) = \frac{C_8^1 C_{12}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_8^2 C_{12}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_8^3}{C_{20}^3} =$$

$$\frac{C_8^1 C_{12}^2 + C_8^2 C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{8 \cdot \dfrac{12!}{2! \cdot 10!} + \dfrac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 12 + \dfrac{8!}{3! \cdot 5!}}{\dfrac{20!}{3! \cdot 17!}} =$$

$$\frac{528 + 336 + 56}{114} \approx 0,81.$$

13. В первом ящике находится 2 белых и 5 чёрных шаров, во втором ящике - 3 белых и 2 чёрных шара. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что оба вынутых шара - чёрные.

Решение.

Пусть событие A: вынули чёрный шар из первого ящика, B: вынули чёрный шар из второго ящика. Необходимо найти $P(AB)$. Так как A и B независимые события, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{2+5} \cdot \frac{3}{3+2} = \frac{2}{7} \approx 0,286.$$

14. Контролёр проверяет изделия на соответствие стандарту. Известно, что вероятность соответствия стандарту изделий равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба будут стандартными, если события появления стандартных изделий независимы? Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?

Решение.

A_1: первое изделие стандартное, A_2: второе изделие стандартное. Так как события A_1 и A_2 независимы по условию задачи, то по первому вопросу:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

По второму вопросу:

Пусть B_1: только первое изделие стандартное ($B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$), B_2: только второе изделие стандартное ($B_2 = A_2 \cdot \overline{A_1}$).

Событие B_1 и B_2 несовместные, поэтому

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(A_2) \cdot (\overline{A_1}) =$$
$$0,9 \cdot (1 - 0,9) + 0,9 \cdot (1 - 0,9) = 0,18.$$

15. На экзамене по теории вероятностей было 30 билетов. Студент дважды извлекает по одному билету из предложенных билетов (не возвращая их). Студент подготовился лишь по 25 билетам. Какова вероятность того, что во второй раз студент извлечет "удачный билет если в первый раз он извлек "неудачный билет"?

Решение.

A: Студент в первый раз извлек "неудачный билет B: Студент во второй раз извлек "удачный билет".

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad P_A(B) = \frac{25}{29}.$$

16. В районе 100 поселков. В пяти из них находятся пункты проката сельхозтехники. Случайным образом отобраны два поселка. Какова вероятность того, что в них окажутся пункты проката?

Решение.

A: в первом поселке находится пункт проката, B: во втором поселке находится пункт проката.

$$P(A) = \frac{5}{100} = 0,05.$$

Рассмотрим событие B при условии, что событие A произошло и найдем условную вероятность:

$$P_A(B) = \frac{4}{99}$$

Искомая вероятность найдется как произведение двух вероятностей:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = \frac{1}{495}.$$

17. На экзамене по теории вероятностей было 34 билета. Студент дважды извлекает по одному билету из предложенных билетов (не возвращая их). Студент подготовился лишь по 30 билетам. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, выбрав первый раз "неудачный билет"?

Решение:

A: в первый раз вынут неудачный билет, B: во второй раз вынут удачный билет. События A и B зависимые. Требуется найти вероятность события AB. По формуле условной вероятности $P(AB) = P(A)P_A(B)$:

$$P(A) = \frac{4}{34}, \quad P_A(B) = \frac{30}{33}, \quad P(AB) = \frac{4}{34} \cdot \frac{30}{33} = 0,107.$$

18. В ящике 4 красных и 6 синих шаров. Вытаскиваются два шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из вытащенных шаров окажется красным?

Решение.

A: первый из вытащенных шаров красный, B: второй из вытащенных шаров красный. A и B - совместные события и зависимые (вероятность появления события B зависит от появления события A).

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A)P_A(B) = 0,4 + 0,4 - 0,4 \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{3}.$$

19. Из 1000 ламп 380 принадлежат к 1 партии, 270 - ко второй партии, остальные к третьей. В первой партии 4% брака, во второй - 3%, в третьей - 6%. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа - бракованная.

Решение

Введем полную группу независимых гипотез: B_i: лампа принадлежат i-ой партии, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$P(B_1) = 0,38, \ \ P(B_2) = 0,27, \ \ P(B_3) = 0,35.$$

Введем событие A: лампа бракованная. По условию даны вероятности:

$$P_{B_1}(A) = 0,04; \ \ P_{B_2}(A) = 0,03; \ \ P_{B_3}(A) = 0,06.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$
$$0,38 \cdot 0,04 + 0,27 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,06 = 0,0443.$$

20. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: 4 - с первого, 5 - со второго, 7 - с третьего и 4 - с четвертого. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или с третьего склада?

21. В городе предполагается открыть 6 предприятий и 15 индивидуальных предпринимательств. Для этой цели банк города в один месяц планирует выделить крупные кредиты пяти клиентам. Найти вероятность того, что среди них будет не более 3 индивидуальных предпринимателей.

22. Три ящика содержат по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором - 7, в третьем - 9. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

23. Вероятность правильного оформления счета на предприятии составляет 0,95. Во время аудиторской проверки были взяты два счета. Какова вероятность того, что только один из них будет оформлен правильно?

24. В ящике лежит 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь, если в первый раз была извлечена нестандартная деталь.

25. В студенческой группе 25 человек. У семи из них есть шпаргалки к экзамену. Студент случайным образом обращается за помощью к двум студентам. Какова вероятность того, что у обоих окажутся шпаргалки?

26. В колоде 36 карт. Игрок дважды вытаскивает по одной карте (не возвращая их). Какова вероятность того, что оба раза будут вытащены "тузы"?

27. Имеются два независимых устройства, сигнализирующих об аварии. Вероятность срабатывания первого устройства составляет 0,8, вероятность срабатывания второго - 0,7. Найти вероятность того, что сигнал об аварии будет подан.

28. Компьютеры одной марки производят 2 предприятия. первое предприятие выпускает $\frac{3}{4}$ всех компьютеров, второе - $\frac{1}{4}$. На первом предприятии 1% брака, на втором - 2%. Найти вероятность того, что купленный вами компьютер исправен.

29. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. Найти вероятность того, что мишень: а) будет поражена дважды; б) не будет поражена ни разу;в) будет поражена хотя бы один раз; г) будет поражена ровно один раз.

30. Программа экзамена содержит 30 вопросов. Студент знает 20 из них. Каждому студенту предлагают два вопроса, которые выбираются случайным образом. Положительная оценка ставится в том случае, если студент правильно ответил хотя бы на один вопрос. Какова вероятность успешной сдачи экзамена?

31. В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

32. Сотрудники отдела маркетинга полагают, что в ближайшее время ожидается рост спроса на продукцию фирмы. Вероятность этого они оценивают в 80%. Консультационная фирма, занимающаяся прогнозом рыночной ситуации, подтвердила предположение о росте спроса. Положительные прогнозы консультационной фирмы сбываются с вероятностью 95%, а отрицательные - с вероятностью 99%. Какова вероятность того, что рост спроса действительно произойдет?

33. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй - только белые и в третьей - только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

34. В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попадания в мишень для данного стрелка соответственно равны 0.3, 0.6, 0.5, 0,7 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из случайно выбранной винтовки?

35. В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

36. Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы - 0,1, а при форсированном - 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% - в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

37. На склад поступило 2 партии изделий: первая - 4000 штук, вторая - 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй - 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

38. На склад поступило 2 партии изделий: первая - 4000 штук, вторая - 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 20%, во второй - 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

39. Электролампы изготавливаются на трех заводах. 1-ый завод производит 30% общего количества ламп, 2-й - 55%, а 3-й - остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го - 1,5%, 3-го - 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

40. В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек - средний и 3 - низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

    а) он был подготовлен очень хорошо;

    б) был подготовлен средне;

    в) был подготовлен плохо.

41. Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит в 2 раза больше деталей, чем второй цех, и в 4 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 12%, во втором - 8%, в третьем - 4%. Для контроля из контейнера берется одна деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех?

8 Случайные величины

Результатом проведения эксперимента может быть некоторое число. Например, при бросании игрального кубика — число выпавших очков. Следовательно, если буквой X обозначить количество выпавших очков при одном бросании кубика, то значения переменной X будут принадлежат множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Рассмотрим другой пример. Пусть производится измерение температуры воздуха в течение суток. Обозначим буквой Y температуру воздуха. Ясно, что значения переменной Y будут принадлежат некоторому числовому промежутку от минимального значения температуры до ее максимального значения в течении суток. Приведенные примеры являются примерами случайных величин.

Определение 8.1 *Случайной величиной* называется величина, которая в результате эксперимента может принять только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин, которые не могут быть учтены.

Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

8.1 Дискретные случайные величины.

Определение 8.2 Случайная величина называется *дискретной,* если ее возможные значения принадлежат конечному или счетному[3] множеству.

Пример 8.30. Пусть X — сумма выпавших очков при одновременном бросании двух игральных кубиков. Тогда $X \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Расчитаем вероятности, с которыми величина X принимает эти значения. Так как число выпавших очков на каждой грани изменяется от одного до шести, то количество всех элементарных исходов, вычисленное по правилу произведения, будет равно 36. Теперь подсчитаем количество благоприятных исходов для каждого значения величины X и соответствующие вероятности:

$$
\begin{aligned}
2 = 1 + 1 \Rightarrow p = \frac{1}{36},\\
3 = 1 + 2 = 2 + 1 \Rightarrow p = \frac{2}{36},\\
4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1 \Rightarrow p = \frac{3}{36},\\
5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 \Rightarrow p = \frac{4}{36},\\
6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1 \Rightarrow p = \frac{5}{36},\\
7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 \Rightarrow p = \frac{6}{36},\\
8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 4 + 4 = 5 + 3 = 6 + 2 \Rightarrow p = \frac{5}{36},\\
9 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 \Rightarrow p = \frac{4}{36},\\
10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4 \Rightarrow p = \frac{3}{36},\\
11 = 5 + 6 = 6 + 5 \Rightarrow p = \frac{2}{36},\\
12 = 6 + 6 \Rightarrow p = \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

[3]Под счетным множеством понимается бесконечное множество, все элементы которого могут быть пронумерованы натуральными числами.

Составим таблицу соответствий между возможными значениями величины X и их вероятностями:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Заметим, что сумма всех вероятностей во второй строке таблицы равна 1.

Определение 8.3 *Законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения может быть задан в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Так как случайная величина X обязательно принимает какое-нибудь одно из своих значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Задача 8.9. Составить закон распределения случайной величины X — числа выпадений герба при четырех подбрасываниях монеты.

Решение. Ясно, что $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Для вычисления соответствующих вероятностей воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Очевидно, что $p = \dfrac{1}{2} = q$.

$$
\begin{aligned}
P_4(0) =& C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16},\\
P_4(1) =& C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16},\\
P_4(2) =& C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16},\\
P_4(3) =& C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16},\\
P_4(4) =& C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

Искомый закон распределения будет иметь вид:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Приведенный пример является примером биномиального распределения. Закон распределения называется *биномиальным,* если вероятности значений случайной величины вычисляются по формуле Бернулли.

Закон распределения полностью характеризует дискретную случайную величину. Однако он не всегда может быть известен. Существуют числовые характеристики случайных величин, которые носят обобщенный характер. К ним относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Пусть дискретная случайная величина X имеет следующий закон распределения:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Определение 8.4 *Математическим ожиданием* величины X называется число

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n. \tag{35}$$

Вероятностный смысл математического ожидания заключается в том, что оно приближенно равно среднему значению случайной величины. Действительно, предположим, что в результате эксперимента случайная величина X приняла m различных значений: $x_1, x_2, \ldots, x_m$, причем значение x_i она приняла n_i раз $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Пусть $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. Тогда ее среднее значение будет равно

$$\frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \cdots + x_mn_m}{n} = x_1\frac{n_1}{n} + x_2\frac{n_2}{n} + \cdots + x_m\frac{n_m}{n}.$$

Относительные частоты $\frac{n_i}{n}$ приближенно равны вероятностям p_i, с которыми величина X принимает значения x_i. Поэтому

$$M(X) \approx x_1\frac{n_1}{n} + x_2\frac{n_2}{n} + \cdots + x_m\frac{n_m}{n}.$$

Пример 8.31. Найдем математическое ожидание величины X — числа выпадений герба при пяти подбрасываниях монеты. Закон распределения величины

X найден в задаче 9. Воспользуемся им.

$$M(X) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \\ = \frac{0+5+20+30+20+5}{32} = \frac{80}{32} = 2,5.$$

Происхождение понятия "математическое ожидание"связано с азартными играми, в которых игроков интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша.

Математическое ожидание дает информацию о среднем значении случайной величины, но не говорит о том, как распределяются ее значения. Рассмотрим пример.

Пример 8.32. Пусть случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения:

X	$-0,1$	$0,1$
P	0,5	0,5

Y	-100	100
P	0,5	0,5

Легко проверить, что $M(X) = M(Y) = 0$. Значения величины X близки к математическому ожиданию, а значения величины Y далеки от математического ожидания.

Для выяснения разброса значений случайной величины используется другая числовая характеристика — дисперсия. Определим сначала понятие отклонения. Под отклонением случайной величины X будем понимать случайную величину $X - M(X)$, значения которой получаются вычитанием из значений величины X ее математического ожидания $M(X)$. Легко доказать, что $M(X - M(X)) = 0$, поэтому среднее значений отклонений случайной величины не характеризует разброс ее значений. Однако, переходя к квадрату отклонения, мы получим такую характеристику.

Определение 8.5 *Дисперсией случайной величины* называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

Дисперсия случайной величины X обозначается через $D(X)$. Таким образом,

$$D(X) = M((X - M(X))^2). \quad (36)$$

На практике вычисление дисперсии удобней производить по следующей формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad (37)$$

Пример 8.33. Пусть случайная величина X задана следующим законом распределения:

X	-1	2	5
P	0,1	0,5	0,4

Вычислим дисперсию $D(x)$.

1. Сначала вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = -1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,4 = -0,1 + 1 + 2 = 2,9.$$

2. Составим закон распределения величины X^2:

X^2	1	4	25
P	0,1	0,5	0,4

3. Вычислим математическое ожидание величины X^2:

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,4 = 0,1 + 2 + 10 = 12,1.$$

4. Воспользуемся формулой (37):

$$D(X) = 12,1 - (2,9)^2 = 12,1 - 8,41 = 3,69.$$

Рассмотрим еще один пример.

Пример 8.34. Пусть дискретная случайная величина Y задана следующим законом распределения:

X	-1	2	5
P	0,2	0,3	0,5

Математическое ожидание

$$M(Y) = -1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0,5 = -0,2 + 0,6 + 2,5 = 2,9 = M(X).$$

Вычислим дисперсию $D(Y)$.

Составим закон распределения величины Y^2:

Y^2	1	4	25
P	0,2	0,3	0,5

Вычислим математическое ожидание величины Y^2:

$$M(Y^2) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 25 \cdot 0,5 = 0,2 + 1,2 + 12,5 = 13,9.$$

Воспользуемся формулой (37):

$$D(Y) = 13,9 - (2,9)^2 = 13,9 - 8,41 = 4,49.$$

Сравнивая величины X и Y в примерах 33 и 34 замечаем, что обе величины принимают одни и те же значения и имеют одинаковые математические ожидания. Однако дисперсия величины X меньше дисперсии величины Y. Это происходит потому, что дисперсия учитывает не только сами отклонения, но и их вероятности. У величины X значения, наиболее удаленные от математического ожидания, имеют меньшие вероятности, чем вероятности соответствующих значений величины Y, а значения, более близкие к математическому ожиданию имеют большие вероятности у величины X, чем у величины Y.

Наряду с дисперсией, характеризующей разброс значений случайной величины X, используют *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$, которое определяется следующей формулой:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{38}$$

Заметим, что среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

8.2 Непрерывные случайные величины.

Существуют случайные величины, которые могут принимать любые значения из некоторого промежутка. Такие случайные величины относятся к непрерывным случайным величинам. Примером непрерывной случайной величины может быть температура воздуха, вес или размеры детали и т. д. Множество значений непрерывной случайной величины бесконечно. Для непрерывных случайных величин вводят понятие функции распределения.

Определение 8.6 *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Функцию распределения называют также *интегральной функцией*. Непосредственно из определения следует, что

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \tag{39}$$

Установим еще два свойства функции распределения.

Пусть $x_2 > x_1$. Тогда

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leqslant X < x_2),$$

откуда вытекает, что

$$F(x) - \text{неубывающая функция} \tag{40}$$

и если $a < b$, то

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a). \tag{41}$$

Пусть случайная величина X имеет следующую функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рисунке 15. Функция $F(x)$ является непрерывной. Найдем несколько ее значений:

Рис. 15.

$$F(-2) = 0,\ F(0) = 0,\ F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ F(1) = 1,\ F(2) = 1.$$

Функция распределения устанавливает соответствие между значениями случайной величины и их вероятностями, поэтому она полностью определяет непрерывную случайную величину. Наряду с функцией распределения рассматривают другую функцию — плотность распределения вероятностей.

Определение 8.7 *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$, являющуюся производной от ее функции распределения $F(x)$, то есть

$$f(x) = F'(x).$$

Поскольку функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, то $f(x)$ — неотрицательная функция. Имеет место следующая формула:

$$P(a \leqslant X < b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{42}$$

Действительно, согласно формуле (41) $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$. Учитывая, что функция $F(x)$ является первообразной функцией для $f(x)$, по формуле Ньютона-Лейбница получаем $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

С использованием плотности распределения вероятностей для непрерывной случайной величины X определяются *математическое ожидание*

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx, \tag{43}$$

дисперсия

$$D(X) = \int_a^b (X - M(X))^2 f(x) dx \tag{44}$$

и *среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{45}$$

Плотность распределения вероятностей называют также *законом распределения непрерывной случайной величины*. Существует несколько основных законов распределений.

Определение 8.8 Распределение вероятностей называется *равномерным,* если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

Несложно доказывается, что плотность вероятности равномерного распределения задается функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b; \\ 0, & \text{если } x \geqslant b. \end{cases}$$

График этой функции представлен на рисунке 16.

Рис. 16.

Определение 8.9 Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется *нормальным,* если плотность распределения вероятностей задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{46}$$

где a — математическое ожидание величины X, а σ — среднее квадратическое отклонение. График функции $f(x)$ называется *нормальной кривой* (а также *кривой Гаусса*). Вид этого графика представлен на рисунке 16. Как следует из определения функции (46), ее график симметричен относительно прямой $x = a$. В точке a эта функция имеет максимум. Изменение параметра a не влияет на форму нормальной кривой, а лишь приводит к ее сдвигу вдоль оси абсцисс.

Изменение параметра σ влияет на форму нормальной кривой. При уменьшении σ кривая вытягивается вдоль прямой $x = a$, а при увеличении параметра σ – сжимается вдоль этой прямой (см. рисунок 18.)

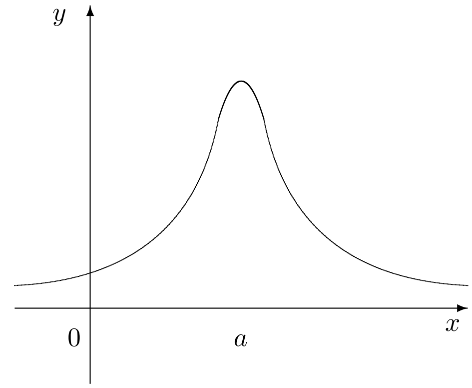

Рис. 17.

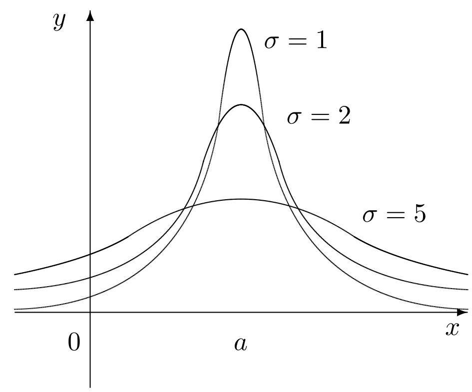

Рис. 18.

Функцией Лапласа называется следующая функция:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{47}$$

Используя эту функцию, можно выразить вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β):

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \tag{48}$$

Для нахождения значений функции Лапласа применяются специальные таблицы. Такие таблицы обычно помещают в приложениях к учебникам и задачникам по теории вероятностей (см., например,[1, 2]).

Пример 8.35. Пусть непрерывная случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M(x) = 20$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(x) = 15$. Найдем вероятность того,что X примет значение, принадлежащее интервалу $(30, 40)$. Воспользуемся формулой (48):

$$P\left(30 < X < 40\right) = \Phi\left(\frac{40-20}{15}\right) - \Phi\left(\frac{30-20}{15}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{20}{15}\right) - \Phi\left(\frac{10}{15}\right) = \Phi(1,33) - \Phi(0,67) =$$

Далее, пользуясь таблицей значений функции $\Phi(x)$, находим $\Phi(1,33) = 0,4082$, $\Phi(0,67) = 0,2486$. Окончательно имеем:

$$P\left(30 < X < 40\right) = 0,4082 - 0,2486 = 0,1596.$$

Нормальное распределение имеет широкое распространение. Объяснение этому факту дал русский математик А.М. Ляпунов в виде центральной предельной теоремы. Суть этой теоремы состоит в следующем: *если случайная величина X есть сумма очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.*

Существует несколько различных условий, с помощью которых можно отклонить предположение о нормальном распределении или наоборот, подтвердить его возможность. Одним из таких условий является правило трех сигм, которое формулируется следующим образом: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.* (На самом деле $P(|X - M(X)| < 3\sigma) \approx 0,9973$). Использование этого правила происходит следующим образом: если распределение случайной величины X не известно, но условие, указанное в правиле трех сигм выполнено, то можно предположить,что что величина X распределена нормально. Если же правило трех сигм не выполнено, то очевидно, что случайная величина X не подчинена нормальному закону.

8.3 Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайной величиной?
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Что такое закон распределения дискретной случайной величины?
4. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величины?

5. Что называется дисперсией дискретной случайной величины? Что характеризует дисперсия?

6. Что называется средним квадратическим отклонением?

7. Дайте понятие непрерывной случайной величины.

8. Что называется функцией распределения непрерывной случайной величины?

9. Что такое плотность распределения вероятностей?

10. Сформулируйте определение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.

11. Какое распределение вероятностей непрерывной случайной величины называется нормальным?

12. Изобразите схематично график плотности распределения вероятностей для нормального распределения.

13. Назовите правило, с помощью которого можно подтвердить или отвергнуть предположение о нормальном распределении.

8.4 Упражнения

1. Составьте закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпавших очков при одном бросании игрального кубика.

2. Пусть в урне содержится 10 белых и 4 черных шара. Предположим, что из урны вынимаются последовательно два шара. Пусть Y — число черных шаров из числа вынутых шаров. Составьте закон распределения величины Y.

3. Стрелок стреляет по мишени 3 раза. Составьте закон распределения дискретной случайной величины Z — числа попаданий в мишень, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

4. Закон распределения дискретной случайной величины X задан следующей таблицей:

X	-2	-1	5	7
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

5. Вычислите математические ожидания, дисперсии и средние квадратические отклонения случайных величин из упражнений $1-3$.

6. Заданы две случайных величины с законами распределения:

X	1	2	3
p	0,2	0,5	0,3

Y	-1	0	0,5	2
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти математическое ожидание и дисперсию каждой из них.

7. Известно, что некоторая случайная величина может принимать значения 0, 2 и 4. Известно, что математическое ожидание равно 2, а дисперсия - 0,8. Найти закон распределения случайной величины.

8. Подбрасывают два игральных кубика. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины - суммы выпавших очков.

9. Имеется три независимо работающих устройства. Вероятность того, что устройство выйдет из строя за некоторый промежуток времени, равна 0,2, 0,4 и 0,7 для 1, 2 и 3 устройств, соответственно. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины - числа вышедших из строя устройств.

10. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос равна $0,9$. Требуется: а) составить закон распределения случайной дискретной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту; б) найти наивероятнейшее число m_0 заданных студенту допонительных вопросов.

11. Дискретная случайная величина X имеет только два фозможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1 равна 0,6. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и диспресия известны: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

12. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 3(x-1), & \text{если } 1 < x \leqslant 2; \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Постройте ее график.

13. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 2; \\ x-2, & \text{если } 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найдите ее плотность распределения вероятностей.

14. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \dfrac{x}{2}, & \text{если } 0 < x \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины X.

15. Какие из следующих графиков являются графиком плотности распределения вероятностей нормального распределения?

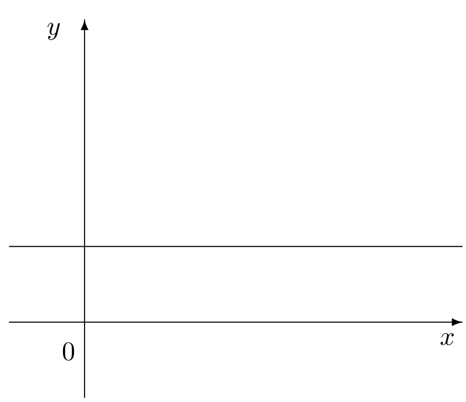

Рис. 19.

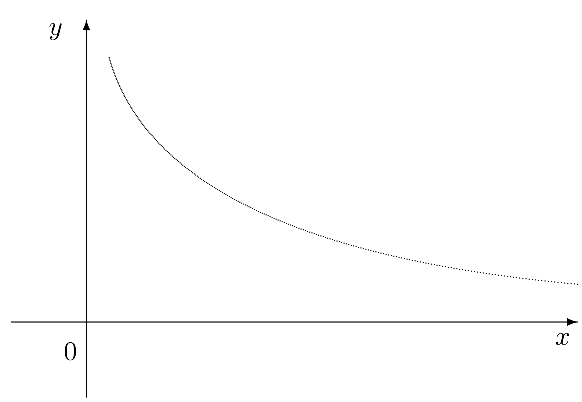

Рис. 20.

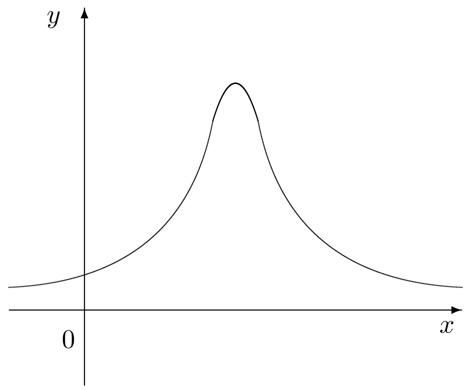

Рис. 21.

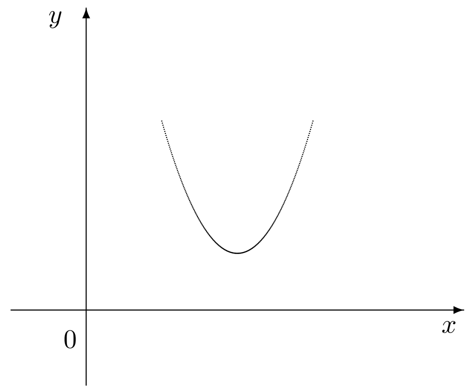

Рис. 22.

16. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{4-2x}{3} & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите:

а) функцию распределения вероятностей случайной величины X;

б) постройте график плотности и функции распределения;

в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Решение:

$$a) F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt = 0, & x \le 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{-\infty}^{x} \dfrac{4-2t}{3}dt = \left(\dfrac{4}{3}t - \dfrac{t^2}{3}\right)\Bigg|_0^x = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{x^2}{3}, & 0 < x \le 1, \\ 0\,dt + \int\limits_{-\infty}^{1} \dfrac{4-2t}{3}dt + \int_1^x 0\,dt = 1, & x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{4}{3}x - \dfrac{x^2}{3}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

б)

в) $P\left(\dfrac{1}{6} < X < \dfrac{1}{3}\right) = F\left(\dfrac{1}{3}\right) - F\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{7}{36}$.

17. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{cx^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите:

а) константу c;

б) плотность распределения случайной величины X;

в) $M(X)$, D(X).

Решение.

а) Так как X является непрерывной случайной величиной, ее функция распределения является непрерывной при любом $x \in \mathbb{R}$. Тогда $= 1$. Воспользуемся этим равенством для определения константы c.

$$\lim_{x \to 2} \frac{cx^2}{4} = \;\Leftrightarrow\; = 1.$$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Плотность распределения вероятностей $f(x) = F'(x)$. Продифференцировав функцию распределения, получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

в) Для вычисления числовых характеристик непрерывной случайной величины X воспользуемся формулами

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{2} x \cdot \frac{x}{2} dx = \left.\frac{x^3}{4}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - (M(X))^2 = \int\limits_{0}^{2} x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

18. Минутная стрелка электрических часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найдите вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 секунд.

Решение.

Разница в показаниях часов и истинного значения времени является случайной величиной », равномерно распределенной на отрезке [0; 60]. В задаче требуется найти вероятность того, что $X \in [0; 20]$.

$$P(0 < X < 20) = \int\limits_{0}^{20} f(x)\,dx.$$

Для равномерного закона распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{60}, & 0 < x \le 60, \\ 0, & x > 60. \end{cases}$$

Тогда $P(0 < X < 20) = \int_0^{20} \dfrac{1}{60} dx = \left.\dfrac{x}{60}\right|_0^{20} = \dfrac{1}{3}$.

19. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок ($a = 0$). Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением s = 20 г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

    Решение.

    По условию задачи ошибка взвешивания $X \in (0; 20)$. Требуется найти $P(|X| < 10)$. Для определения этой вероятности воспользуемся таблицей значений функции Лапласа

$$P(|X| < 10) = P(-10 < X < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{20}\right) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383.$$

9 Введение в математическую статистику

Предположим, что нам нужно выявить количественные признаки (размеры, вес, плотность и т.д.) большой совокупности однородных объектов (деталей, плодов, растворов и т.д.) или необходимо провести общественный опрос и получить ответы на несколько вопросов. Мы понимаем, что, проводя аналогичные исследования в другой раз мы можем получить другие количественные данные. Возникает вопрос: Как правильно интерпретировать полученные данные? Если исходить из закона статистической устойчивости, по которому при большом числе испытаний относительная частота стабилизируется около вероятности, то становится ясным, что для наших целей лучше всего подойдут вероятностные модели. Математическая статистика есть раздел математики, в котором методами теории вероятностей изучаются закономерности массовых случайных явлений. Можно выделить две основные задачи математической статистики:

- нахождение способов сбора статистических сведений;
- разработка методов анализа статистических данных.

Рассмотрим основные понятия, связанные со способами сбора статистических сведений.

9.1 Генеральная и выборочная совокупности

Предположим, что требуется изучить некоторое множество и выявить какие-то количественные характеристики. Множество всех объектов, которое нужно изучить, называется *генеральной совокупностью.* Если генеральная совокупность слишком велика или исследование объектов связано с их разрушением, то не имеет смысла изучать каждый объект. В таких случаях из генеральной совокупности случайным образом отбирают часть объектов. Отобранную часть называют *выборочной совокупностью* или просто *выборкой.* Выборки можно разделить на два типа: *повторные* и *бесповторные.* При повторной выборке отобранные объекты возвращаются в генеральную совокупность и снова могут участвовать при отборе. При бесповторной выборке отобранные объекты не возвращаются в генеральную совокупность. Число отобранных объектов называется *объемом выборки.*

9.2 Полигон и гистограмма

Пусть из генеральной совокупности произведена выборка, в которой величина x_1 встретилась n_1 раз, величина x_2 встретилась n_2 раза и т. д. величина x_k встретилась n_k раз. Тогда сумма $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ равна объему выборки. Величины $x_1, x_2, \dots, x_k$ называются *вариантами,* а упорядоченная по возрастанию последовательность вариант называется *вариационным рядом.* Числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ называются *частотами,* а частные $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}$ называются *относительными частотами.* По аналогии с дискретными случайными величинами можно рассматривать соответствие между вариантами и их частотами:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

или их относительными частотами:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	$\dots$	$\frac{n_k}{n}$

Каждое из таких соответствий называется *статистическим распределением выборки.*

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют соседние точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, …, $(x_k; n_k)$. Аналогично определяется *полигон относительных частот.*

Пример 9.36. Пусть распределение частот выборки задано следующей таблицей:

x_i	3	5	8
n_i	2	1	3

Тогда полигон частот будет иметь вид:

Рис. 24.

Чтобы построить полигон относительных частот сначала найдем объем выборки n:

$$n = 2 + 1 + 3 = 6,$$

а затем относительные частоты:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \; \frac{n_2}{n} = \frac{1}{6}, \; \frac{n_3}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Соответствующее распределение будет таким:

x_i	3	5	8
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Теперь строим полигон относительных частот:

Рис. 25.

При большом количестве вариант прибегают к их группировке: интервал, содержащий все варианты, разбивают на промежутки одинаковой длины, например, длины ℓ, а затем подсчитывают сумму n_i частот вариант для каждого i-го промежутка. Вместо полигонов частот рассматривают *гистограммы частот*. Гистограмма состоит из прямоугольников с длиной основания, равной ℓ, и высотой, равной $\dfrac{n_i}{\ell}$ *(плотность частоты)*. Таким образом, площадь i-го прямоугольника численно равна сумме частот n_i вариант i-го интервала. *Гистограмма относительных частот* отличается от гистограммы частот тем, что высоты прямоугольников равны $\dfrac{n_i}{n\ell}$.

Пример 9.37. Пусть статистическое распределение частот задано следующим образом:

x_i	3–7	7–11	11–15	15–19
n_i	5	8	12	4

Построим сначала гистограмму частот. Длина частичного интервала $\ell = 4$. Вычислим плотности частот:

$$\frac{n_1}{\ell} = \frac{5}{4} = 1,25;\ \frac{n_2}{\ell} = \frac{8}{4} = 2;\ \frac{n_3}{\ell} = \frac{12}{4} = 3;\ \frac{n_4}{\ell} = \frac{4}{4} = 1.$$

Строим гистограмму частот:

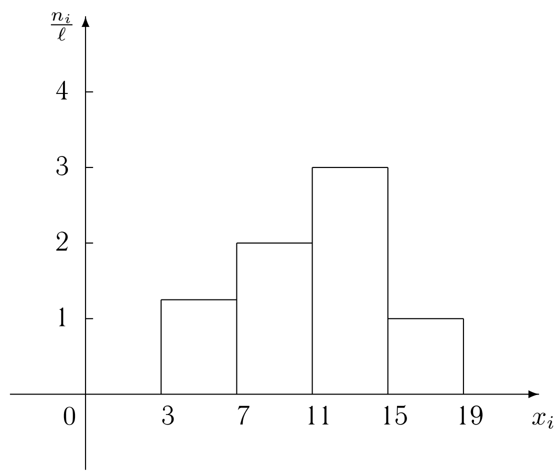

Рис. 26.

Построим гистограмму относительных частот. Сначала определяем объем выборки: $n = 5 + 8 + 12 + 4 = 29$. Затем вычисляем относительные частоты:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{5}{29},\ \frac{n_2}{n} = \frac{8}{29},\ \frac{n_3}{n} = \frac{12}{29},\ \frac{n_4}{n} = \frac{4}{29}.$$

Вычисляем плотности относительных частот:

$$\frac{n_1}{n\ell} = \frac{5}{116} = 0,04,\ \frac{n_2}{n\ell} = \frac{8}{116} = 0,07,\ \frac{n_3}{n\ell} = \frac{12}{116} = 0,10,\ \frac{n_4}{n\ell} = \frac{4}{116} = 0,03.$$

Строим гистограмму относительных частот:

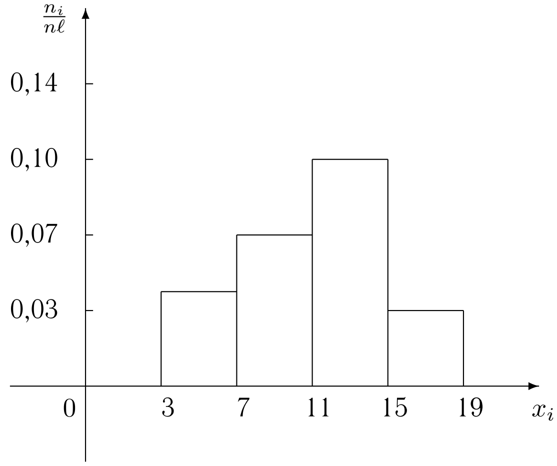

Рис. 27.

Сравнивая рисунок 26 с рисунком 27, кажется, что никаких изменений не произошло. На самом деле в последнем рисунке мы изменили масштаб по оси ординат. Если бы мы не меняли масштаба, то высоты всех прямоугольников гистограммы относительных частот нужно было бы уменьшить в 29 раз.

Выясним какой вероятностный смысл имеет гистограмма относительных частот. Для этого заметим прежде, что площадь i-го прямоугольника численно равна сумме относительных частот вариант из соответствующего отрезка (основания прямоугольника), то есть равна относительной частоте попадания варианты в i-ый интервал. При увеличении объема выборки относительная частота приближается к вероятности попадания варианты в этот интервал. Но вероятность попадания случайной величины в интервал (α, β) равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$ — плотности распределения вероятностей. Следовательно, площадь прямоугольника приближенно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком плотности распределения вероятностей (см. рис. 28). Значит, ломаная линия, образованная верхними основаниями прямоугольников гистограммы относительных частот, является приближением к графику плотности распределения. Таким образом, гистограмму относительных частот можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения вероятностей. На практике часто прибегают к кривой, проведенной через середины верхних оснований прямоугольников. Сравнивая построенную кривую с графиками известных законов распределения, делают предположение о характере распределения, например, предположение о нормальном законе распределения (см. рис. 29).

Рис. 28.

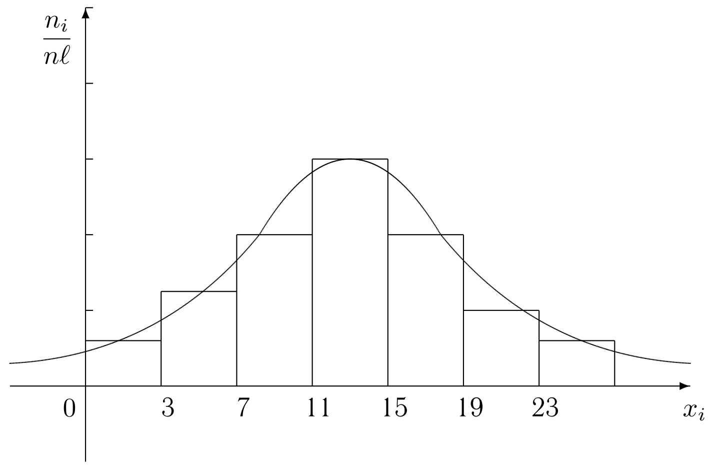

Рис. 29.

9.3 Статистические оценки

Если удается определить характер распределения, то для более точного его описания необходимо определить параметры, задающие это распределение. Например, если установлено, что изучаемый признак подчинен нормальному закону распределения, то требуется оценить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, которые полностью определяют нормальное распределение. Мы рассмотрим оценки трех параметров: математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Для оценки математического ожидания используют выборочную среднюю. Пусть из генеральной совокупности произведена выборка объема n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Выборочной средней* называют число $\overline{x}_B$, являющееся средним арифметическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}. \tag{49}$$

Для оценки дисперсии используют выборочную дисперсию. *Выборочной дисперсией* называют число D_B, равное среднему арифметическому квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от выборочной средней, то есть

$$D_B = \frac{(x_1 - \overline{x}_B)^2 + (x_2 - \overline{x}_B)^2 + \cdots + (x_n - \overline{x}_B)^2}{n}. \tag{50}$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \tag{51}$$

Формулы (49) – (51) оценивают соответствующие параметры лишь приближенно. Ясно, что оценки могут менять свои значения при переходе от одной выборки к другой. Однако, приведенные оценки обладают рядом “хороших” свойств. Например, можно доказать *свойство устойчивости выборочных средних:* выборочные средние различных выборок большого объема одной и той же генеральной совокупности приближенно равны между собой.

Пример 9.38. Найдем выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение по следующему распределению выборки:

x_i	15	20	26
n_i	3	5	4

Найдем объем выборки: $n = 3+5+4 = 12$. Для вычисления выборочной средней в данном примере удобнее воспользоваться формулой:

$$\overline{x}_B = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{n}. \qquad (52)$$

$$\overline{x}_B = \frac{3\cdot 15 + 5\cdot 20 + 4\cdot 26}{12} = \frac{45+100+104}{12} = \frac{249}{12} \approx 21.$$

Для вычисления выборочной дисперсии удобнее воспользоваться формулой:

$$D_B = \frac{n_1(x_1-\overline{x}_B)^2 + n_2(x_2-\overline{x}_B)^2 + \cdots + n_k(x_k-\overline{x}_B)^2}{n}. \qquad (53)$$

$$D_B = \frac{3\cdot(15-21)^2 + 5\cdot(20-21)^2 + 4\cdot(26-21)^2}{12} =$$
$$= \frac{108+5+100}{12} = \frac{213}{12} = 17,75.$$

Находим выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{17,75} \approx 4,21.$$

Рассмотрим еще несколько основных характеристик вариационного ряда.

Модой вариационного ряда называют варианту, которая имеет наибольшую частоту. Моду обозначают через M_0.

Медианой вариационного ряда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант. Медиану обозначают через m_e. Если число n нечетно, то есть $n = 2k+1$ для некоторого натурального числа k, то

$$m_e = x_{k+1}. \qquad (54)$$

Если n четно и $n = 2k$, то

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}. \tag{55}$$

Размахом варьирования вариационного ряда называют разность между наибольшей x_{max} и наименьшей x_{min} вариантами. Размах варьирования обозначают буквой R. Следовательно,

$$R = x_{max} - x_{min}. \tag{56}$$

Размах является простейшей характеристикой рассеяния вариационного ряда.

Пример 9.39. Найдем моду, медиану и размах вариационного ряда, заданного следующей таблицей:

x_i	2	5	6	8
n_i	1	3	2	1

Решение. Во второй строке таблицы находим наибольшее из чисел. Это число 3. Ему соответствует варианта 5. Следовательно, $M_0 = 5$.

Для отыскания медианы m_e перепишем вариационный ряд в виде неубывающей последовательности, учитывая частоты вариант:

$$2, 5, 5, 5, 6, 6, 8.$$

Так как число вариант нечетно, то пользуемся формулой (54). Следовательно, $m_e = 5$.

Для вычисления размаха воспользуемся формулой (56): $R = 8 - 2 = 6$.

Другой характеристикой рассеяния вариационного ряда является *среднее абсолютное отклонение ϑ,* то есть среднее арифметическое абсолютных отклонений:

$$\vartheta = \frac{n_1|x_1 - \overline{x}_B| + \cdots + n_k|x_k - \overline{x}_B|}{n_1 + \cdots + n_k}. \tag{57}$$

Пример 9.40. Найдем среднее абсолютное отклонение вариационного ряда

$$11, 11, 15, 15, 17, 17, 17, 20, 20, 20.$$

Решение. Сначала вычислим среднюю выборочную:

$$\overline{x}_B = \frac{2 \cdot 11 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 17 + 3 \cdot 20}{2 + 2 + 3 + 3} = \frac{163}{10} = 16,3.$$

Теперь найдем среднее абсолютное отклонение:

$$\vartheta = \frac{2 \cdot |11 - 16,3| + 2 \cdot |15 - 16,3| + 3 \cdot |17 - 16,3| + 3 \cdot |20 - 16,3|}{10} = 2,64.$$

Для сравнения величин рассеяний двух вариационных рядов используется коэффициент вариации — выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B} \cdot 100\% \tag{58}$$

Коэффициент вариации позволяет сравнивать рассеяния вариационных рядов, имеющих различную размерность (например, сантиметры и граммы).

Пример 9.41. Для изучения некоторого количественного признака из генеральной совокупности объектов была произведена выборка объема $n = 10$. Если отобранные объекты различать по весу, то получится следующий вариационный ряд:

x_i	15	45	55	85	100
n_i	2	2	3	2	1

,

а если по линейным размерам, то ряд будет таким:

x_i	3	5	6	9	11
n_i	2	1	3	2	2

Сравним рассеяния этих рядов, расчитав для них коэффициенты вариации. Начнем с первого ряда. Найдем сначала выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$(\overline{x}_B)_1 = \frac{2 \cdot 15 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 55 + 2 \cdot 85 + 100}{10} = \frac{555}{10} = 55,5.$$

Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся формулой (53):

$$\begin{aligned}
&(D_B)_1 = \\
&= \frac{2(15-55,5)^2 + 2(45-55,5)^2 + 3(55-55,5)^2 + 2(85-55,5)^2 + (100-55,5)^2}{10} = \\
&= \frac{2 \cdot 40,5^2 + 2 \cdot 10,5^2 + 3 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 29,5^2 + 44,5^2}{10} = \\
&= \frac{2 \cdot 1640,25 + 2 \cdot 110,25 + 3 \cdot 0,25 + 2 \cdot 870,25 + 1980,25}{10} = \\
&= \frac{3280,5 + 220,5 + 0,75 + 1740,5 + 1980,25}{10} = \frac{7222,5}{10} = 722,25.
\end{aligned}$$

Находим выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$(\sigma_B)_1 = \sqrt{722,25} \approx 26,87$$

и коэффициент вариации:

$$V_1 = \frac{26,87}{55,5} \cdot 100\% = 48,4\%.$$

Проведем аналогичные вычисления для второго ряда:

$$(\overline{x}_B)_2 = \frac{2\cdot 3 + 5 + 3\cdot 6 + 2\cdot 9 + 2\cdot 11}{10} = \frac{69}{10} = 6,9.$$

$$(D_B)_2 =$$
$$= \frac{2(3-6,9)^2 + (5-6,9)^2 + (6-6,9)^2 + 2(9-6,9)^2 + 2(11-6,9)^2}{10} =$$
$$= \frac{2\cdot 3,9^2 + 1,9^2 + 3\cdot 0,9^2 + 2\cdot 2,1^2 + 2\cdot 4,1^2}{10} =$$
$$= \frac{2\cdot 15,21 + 3,61 + 3\cdot 0,81 + 2\cdot 4,41 + 2\cdot 16,81}{10} =$$
$$= \frac{30,42 + 3,61 + 2,43 + 8,82 + 33,62}{10} = \frac{78,9}{10} = 7,89.$$

$$(\sigma_B)_2 = \sqrt{7,89} \approx 2,81$$

$$V_2 = \frac{2,81}{6,9}\cdot 100\% = 40,7\%.$$

Из проведенных вычислений следует неравенство $V_2 < V_1$, которое означает, что второй вариационный ряд имеет меньшее рассеяние, чем первый ряд.

9.4 Вопросы для самопроверки

1. Что называется генеральной совокупностью?
2. Что называется выборочной совокупностью?
3. Что такое объем выборки?
4. Что называется вариационным рядом?
5. Что понимается под статистическим распределением выборки?
6. Дайте понятия полигона и гистограммы частот (относительных частот).
7. Какова роль гистограмм в статистике?
8. Что такое выборочная средняя? Какой параметр распределения она оценивает?
9. Что такое выборочная дисперсия? Какой параметр распределения она оценивает?

10. Что такое выборочное среднее квадратическое отклонение?

11. Что такое мода и медиана вариационного ряда?

12. Какие величины используются для характеристики рассеяния вариационного ряда?

9.5 Упражнения

1. Из генеральной совокупности произведена выборка: 3, 12, 4, 3, 7, 5, 7, 3, 10, 32, 4, 5, 7, 2. Составьте из нее вариационный ряд и найдите статистическое распределение.

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	10	21	35
n_i	5	2	4

Найти распределение относительных частот.

3. Постройте полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	2	3	5	9	12
n_i	5	2	4	3	6

4. Постройте полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	12	13	15	19	22
n_i	8	10	14	7	16

5. Постройте гистограмму частот по данному распределению выборки:

x_i	2–7	7–12	12–17	17–22	22–27
n_i	5	2	4	3	6

6. Постройте гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	12–17	17–22	22–27	27–32	32–37
n_i	5	12	14	13	6

7. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение по данному распределению выборки:

x_i	7	12	21	30
n_i	1	5	3	7

8. Найдите моду вариационного ряда

   (a) 11,13,13,22,25,25,25,30;

   (b) 3,3,3,4,4,4,6,6,7,7,10;

   (c)

x_i	2	5	11	17	20
n_i	1	3	5	2	1

9. Найдите медиану вариационного ряда

   (a) 8,10,13,22,25,25,27,30;

   (b) 3,3,3,4,4,4,6,6,7,7,10;

   (c)

x_i	2	5	11	17	20
n_i	1	3	5	2	1

   (d)

x_i	2	5	11	17	20
n_i	1	3	2	2	1

10. Найдите размах варьирования R и среднее абсолютное отклонение ϑ вариационного ряда

   (a) 4,5,5,7,8,8,8,10,10;

   (b)

x_i	5	7	9	10	12
n_i	2	2	3	2	1

   (c)

x_i	6	8	12	14	15
n_i	1	2	2	2	1

11. С помощью коэффициента вариации V сравните рассеяния двух вариационных рядов

$$8, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 15, 17, 17$$

и

$$20, 20, 25, 25, 25, 30, 30, 35.$$

10 Проверка статистических гипотез.

Одной из задач статистического анализа является проверка гипотезы о различии или сходстве двух выборок. При этом для проверки статистических гипотез необходимо пользоваться определенными статистическими критериями.

Пусть нам известно некоторое статистическое распределение выборки, тогда утверждение, относительно этого распределения, называется *статистической гипотезой.*

Статистический критерий — строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается та или иная статистическая гипотеза.

Сравнивая эмпирические данные и критические (табличные) значения критерия можно судить о том, подтверждается или опровергается гипотеза.

Выделяют два вида критериев: *параметрические и непараметрические*. *Параметрические критерии* — это статистические критерии, которые включают в формулу расчета параметры распределения: $\overline{x}_{\text{В}}$ и $\sigma_{\text{В}}$. К ним можно отнести t-критерий Стьюдента, критерий Фишера и др. *Непараметрические критерии* — критерии, основанные на оперировании частотами или рангами. К ним относятся Q-критерий Розенбаума, критерий знаков, U-критерий Вилкоксона и др.

Выбор критерия для проверки гипотезы зависит от следующих особенностей распределений:

- объема выборки;
- зависимы случайных величин;
- подчиняются ли они они закону нормального распределения.

Зависимыми называются распределения, между которыми есть внутренние связи: генетическая связь; одна и та же группа, исследуемая дважды.

Независимые — это распределения, между которыми нет существенных связей.

10.1 Параметрические критерии.

Параметрические критерии применяются в тех случаях, когда распределение близко к нормальному, нам известны его параметры ($\overline{x}_{\text{В}}$ и $\sigma_{\text{В}}$) и количество испытуемых в выборках приблизительно равны.

10.1.1 t-критерий Стьюдента для независимых распределений

Для сравнения выборочных средних двух независимых распределений применяется t*—критерий Стьюдента* для независимых распределений.

Для вычисления эмпирического значения t-критерия применяется следующая формула:

$$t_{эмп} = \frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot\sigma_1^2 + (n_2-1)\cdot\sigma_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}},$$

где число $n_1 + n_2 - 2$ называется числом степеней свободы двух выборок и обозначается α.

Задача 10.10. Пусть необходимо сравнить между собой результаты выполнения тестов на внимание в двух группах. Возьмем для исследования две группы студентов.

Параметры внимания в группах:

1 группа: $\overline{x} = 40$ с., $\sigma = 6.4$ с., $V = 9\%$, $n = 29$;

2 группа: $\overline{x} = 50$ с., $\sigma = 5.8$ с., $V = 10\%$, $n = 28$.

Рассматриваемые выборки являются независимыми. Будем считать, что распределения обеих групп подчиняются нормальному закону. Проверим гипотезу о том, что внимание первой группы существенно отличается от внимания второй группы. Вычислим значение параметра t:

$$t_{эмп} = \frac{|40-50|}{\sqrt{\frac{(29-1)\cdot(6,4)^2 + (28-1)\cdot(5,8)^2}{29+28-2}\frac{29+28}{29\cdot 28}}} = \frac{10}{\sqrt{2,62}} \approx 6,18.$$

Для оценки возможности допустить ошибку при сравнении средних значений используют *уровни значимости*. Можно выделить несколько *уровней значимости*:

- 0,1 — вероятность допустить ошибку 10%;
- 0,05 — вероятность допустить ошибку 5%;
- 0,02 — вероятность допустить ошибку 2%;
- 0,01 — вероятность допустить ошибку 1%;
- 0,001 — вероятность допустить ошибку 0,1%.

Для t-критерия Стьюдента разработаны табличные значения на всех уровнях значимости. Они зависят от числа степеней свободы α (смотри приложение 11.4).

В нашей задаче $\alpha = 29 + 28 - 2 = 55$. В таблице приложения 11.4 находим строку, ближайшее значение α, при $\alpha = 55$: $t_{0,1} = 1,6730$, $t_{0,05} = 2,004$, $t_{0,02} = 2,3961$, $t_{0,01} = 2,6682$, $t_{0,001} = 3,4764$.

Правило: Если $t_{эмп}$ большее или равно табличного значения, то разность между средними арифметическими двух групп *признается значимой*. В нашем случае $t_{эмп} = 6,18$, то есть больше критических значений t на всех уровнях значимости. Следовательно, внимание 1 группы студентов существенно отличается от внимания 2 группы.

10.1.2 t-критерий Стьюдента для зависимой выборки

Если выборки зависимые, то для проверки гипотезы о различии средних значений используется формула:

$$t_{эмп} = \frac{\overline{r}}{\sigma_r/\sqrt{n}},$$

где $\overline{r}$ — среднее значение разности всех пар показателей; σ_r — среднее квадратическое отклонение значений разностей; n — число пар наблюдений.

Задача 10.11. Пусть необходимо сравнить между собой количества правильно решенных логических задач до и после курса обучения.

№	x_i (до)	y_i (после)	$r_i = x_i - y_i$	r_i^2
1	3	4	1	1
2	8	12	4	16
3	7	10	3	9
4	7	13	6	36
5	8	8	0	0
6	3	9	6	36
7	9	15	6	36
8	10	14	4	16
9	9	18	9	81
10	11	20	9	81
Сумма			48	312

Решение.

1. Найти разность r_i второго и первого замеров для каждого испытуемого.

2. Найти r_i^2.

3. Найти суммы r_i и r_i^2.

4. Вычислить среднее значение разности: $\overline{r}_i = \dfrac{48}{10} = 4,8$.

5. Рассчитать стандартное отклонение для разностей по формуле

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum r_i^2 - (\sum r_i)^2/n}{n-1}} = \sqrt{\frac{312 - (48)^2/10}{10-1}} \approx \sqrt{9,07} = 3,01.$$

6. Вычислить величину: $t_{эмп} = \dfrac{\overline{r}}{\sigma_r/\sqrt{n}} = \dfrac{4,8}{3,01/\sqrt{10}} \approx 5,04$.

7. Сравнить полученную величину с табличной: определить степень свободы $\alpha = n - 1 = 9$, табличные значения критерия (приложение 11.4): $t_{0,1} = 1,8331$, $t_{0,05} = 2,2622$, $t_{0,02} = 2,8214$, $t_{0,01} = 3,2498$, $t_{0,001} = 4,7809$.

Таким образом, полученное значение $t_{эмп}$ превышает табличное, поэтому делаем вывод о том, что результаты после обучения существенно отличаются от результатов до обучения.

10.2 Непараметрические критерии

Если распределение не подчиняется нормальному закону, то для проверки статических гипотез используются *непараметрические критерии*.

10.2.1 Критерий знаков

Одним из наиболее простых непараметрических критериевявляется критерий знаков, основанный на рассмотрении знаков разностей r_i у отдельных испытуемых. Он дает возможность установить, на сколько сонаправленно изменяются значения признака при повторном измерении выборки.

Задача 10.12. В группе изучались два способа решения задач. Чтобы сравнить, какой из них более эффективен, были даны две серии заданий.

Испытуемые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Число задач решенных способом I	4	3	6	7	10	5	5	4	7	9	9
Число задач решенных способом II	6	4	8	3	8	6	3	5	5	9	10
Знак разности r_i	–	–	–	+	+	–	+	–	+	=	–

Расчет по критерию знаков

1. Определить знаки разностей у всех испытуемых.

2. Подсчитать число $Z_{эмп}$ тех знаков, которые представлены в большем количестве. В нашем примере больше знаков “$-$”, поэтому $Z_{эмп} = 6$.

3. Исключаем знаки равенства и находим исправленный объем выборки $n_{испр} = 11 - 1 = 10$.

4. Сравнить полученное $Z_{эмп}$ с табличным значением Z при выбранном уровне значимости (приложение 11.5).

Правило. Если $Z_{эмп}$ больше табличного значения $Z_{табл}$, то различия признаются значимыми. В нашем примере $Z_{эмп} = 6$, $Z_{табл} = 9$, таким образом, приходим к выводу, что между двумя способами нет разницы в эффективности решения.

10.2.2 Критерий Вилкоксона.

Критерий Вилкоксона — непараметрический статистический критерий, используемый для сравнения двух независимых выборок по уровню какого-либо признака, измеренного количественно. Метод основан на определении того, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя вариационными рядами. Чем меньше значение критерия, тем вероятнее, что различия между значениями параметра в выборках достоверны.

Задача 10.13. Необходимо сравнить однородность двух массивов данных. Для этого произведены замеры двух групп.

(А): 16, 8, 5, 6, 11, 5, 13, 12, 9, 11; $n_1 = 10$.

(В): 13, 18, 8, 6, 14, 8, 17, 5, 13, 12, 10, 7; $n_2 = 12$.

Расчет критерия Вилкоксона

1. Объединим вместе данные обеих групп и расположим их в порядке возрастания значений, закодировав принадлежность к группам (А) и (В) каждой варианты.

Номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Код группы	А	А	В	А	В	В	А	А	В	А	В	А	А	А	В
Кол-во слов	5	5	5	6	6	7	8	8	8	9	10	11	11	12	12
Ранг		2		4,5		6		8		10	11	12,5		14,5	

2. Каждому числовому значению полученного ряда присвоим ранг: среднее арифметическое номеров мест, на которых расположены одинаковые числа.

Номер	16	17	18	19	20	21	22
Код группы	А	В	В	В	А	В	В
Кол-во слов	13	13	13	14	16	17	18
Ранг		17		19	20	21	22

3. Найдем сумму рангов для каждой группы:

   (А) : $\sum r_1 = 2 + 2 + 4,5 + 8 + 10 + 12,5 + 12,5 + 14,5 + 17 + 20 = 103;$

   (В) :$\sum r_2 = 2 + 4,5 + 6 + 8 + 8 + 11 + 14,5 + 17 + 17 + 19 + 21 + 22 = 150.$

   Для проверки вычислений на данном этапе можно воспользоваться формулой
$$\sum r_1 + \sum r_2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2}.$$
   Получаем
$$103 + 150 = 253; \frac{(10 + 12)}{2} \cdot (22 + 1) = 253.$$
   Следовательно, операция ранжирования выполнена верно.

4. Вычислим параметры U по формулам:
$$U_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \sum r_1;$$
$$U_1 = 10 \cdot 12 + \frac{10(10 + 1)}{2} - 103 = 72;$$
$$U_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - \sum r_2;$$
$$U_2 = 10 \cdot 12 + \frac{12(12 + 1)}{2} - 150 = 48.$$
   Должно выполняться соотношение: $U_1 + U_2 = n_1 \cdot n_2$.

5. В приложения 11.6 найдем пограничные значения U-критерия для $n_1 = 10$, $n_2 = 12$: $U_{min} = 29$, $U_{max} = 91$.

Правило. Если меньшее из найденных U меньше U_{min}, то различия признаются значимыми. В нашем примере меньшее $U_2 = 48 > 29 = U_{min}$, следовательно различий между первым и вторым способом нет.

10.3 Вопросы для самопроверки

1. Что такое статистический критерий? Какие виды критериев выделяют?

2. Дайте определение параметрических и непараметрических критереев. Приведите примеры.

3. Кие группы называются зависимыми (независимыми)?

4. При решении какого типа задач применяется t-критерий Стьюдента?

5. Что такое уровень значимости? Какие основные уровни значимости выделяют?

6. Каковы преимущества и недостатки критерия знаков?

10.4 Упражнения

1. Провести расчет для сравнения стрессоустойчивости для двух профессий: учителя и менеджера по продажам для двух групп ($n_1 = 32, n_2 = 33$).

№	учителя, устойчивость к стрессу (баллы)	менеджеры, устойчивость к стрессу (баллы)
1	23	25
2	17	24
3	18	17
4	19	23
5	22	24
6	18	22
7	19	24
8	17	20
9	20	21
10	21	22
11	24	23
12	19	19
13	21	23
14	20	21
15	22	20
16	23	19
17	18	25
18	16	26
19	17	21
20	21	24
21	25	23
22	20	25
23	15	22
24	16	23
25	18	20
26	21	22
27	20	24
28	19	21
29	17	20
30	18	25
31	19	24
32	16	22
33	–	22

2. Сравнить между собой результаты выполнения логических задач до и после курса обучения.

№	Результаты выполнения логических задач до курса (сек.)	Результаты выполнения логических задач после курса (сек.)
1	25	25
2	23	25
3	28	23
4	29	22
5	35	30
6	31	27
7	24	20
8	24	19
9	38	32
10	26	25
11	20	20

3. Результаты измерения уровня тревожности до и после проведения тренинга в группе испытуемых отображены в таблице.

№ испытуемого	Уровень тревожности «до» тренинга	Уровень тревожности У«после» тренинга
1	30	34
2	39	39
3	35	26
4	34	33
5	40	34
6	35	40
7	22	25
8	22	23
9	32	33
10	23	24
11	16	15
12	34	27
13	33	35
14	34	37

Определить, является ли изменение уровня тревожности статистически значимым.

4. Проведение срезовой контрольной работы по математике (алгебра и геометрия) в средней общеобразовательной школе дало следующие результаты по 10-балльной шкале для класса, обучающегося по программе «Развивающего обучения» (7 «Б»), и класса, обучающегося по традиционной системе (7 «А»):

Ученик\Класс	7 «А» (баллы)	7 «Б» (баллы)
1	9	5
2	7	10
3	7	7
4	8	8
5	6	8
6	4	4
7	4	6
8	8	8
9	6	8
10	6	9
11	5	7
12	–	10

Определите, превосходят ли учащиеся 7 «Б» учащихся 7 «А» по уровню знаний по математике.

11 Приложения

11.1 Задания для контрольной работы

Задание I. Алгебра высказываний.

Доказать равносильность формул с помощью таблицы истинности и с помощью преобразований.

1. $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r)$;
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (\neg p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$;
3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow (\neg q)) \vee (p \Rightarrow r)$;
4. $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (q \Rightarrow p) \vee (\neg r \Rightarrow p)$;
5. $\neg p \vee (q \Rightarrow \neg r) \equiv (q \Rightarrow \neg p) \vee (r \Rightarrow \neg p)$;
6. $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r)$;
7. $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$;
8. $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$;
9. $\neg p \wedge \neg(q \Rightarrow r) \equiv \neg(q \Rightarrow p) \wedge \neg(q \Rightarrow r)$;
10. $\neg p \Rightarrow \neg(q \wedge r) \equiv (q \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow p)$;
11. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$;
12. $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$;
13. $p \wedge \neg(q \Rightarrow r) \equiv \neg(p \Rightarrow r) \wedge \neg(q \Rightarrow r)$;
14. $p \vee \neg(q \Rightarrow r) \equiv (\neg q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)$;
15. $\neg p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r) \equiv (\neg q \Rightarrow p) \wedge (r \Rightarrow p)$;
16. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r \equiv (p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)$;
17. $p \vee (\neg q \Rightarrow r) \equiv (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee q)$;
18. $p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$;
19. $\neg p \Rightarrow \neg(q \wedge r) \equiv (\neg p \wedge r) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$;
20. $\neg p \vee \neg(q \Rightarrow r) \equiv \neg(p \wedge r) \wedge (p \Rightarrow q)$;

21. $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \wedge (r \Rightarrow \neg p)$;

22. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r \equiv (p \Rightarrow \neg r) \vee (\neg q \Rightarrow \neg r)$;

23. $p \Rightarrow \neg(q \vee r) \equiv \neg(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \neg r)$;

24. $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$;

25. $p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg r)$.

Задание II. Алгебра множеств.

Дано универсальное множество

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

и три его подмножества A, B, C. Найти множество M.

1.
$$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 12, 13, 14, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14\},$$
$$C = \{1, 2, 8, 10, 12, 14\}.$$
$$M = \overline{A} \cup \overline{B \backslash C}.$$

2.
$$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 12, 13, 14, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14\},$$
$$C = \{1, 2, 8, 10, 12, 14\}.$$
$$M = \overline{A \backslash C} \cup \overline{B \backslash C}.$$

3.
$$A = \{5, 10, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{2, 8, 9, 10, 12\},$$
$$C = \{2, 8, 9, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (\overline{A} \backslash C) \cup (B \backslash C).$$

4.
$$A = \{5, 6, 7, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{2, 7, 9, 10, 12, 14\},$$
$$C = \{3, 8, 10, 11, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = (\overline{A} \backslash \overline{C}) \cup (B \backslash \overline{C}).$$

5.
$$A = \{0, 1, 5, 10, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 8, 9, 10, 12\},$$
$$C = \{0, 1, 8, 9, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (A \cup \overline{B}) \backslash (\overline{A} \cap \overline{C}).$$

6.

$$A = \{2, 6, 10, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 2, 7, 9, 10, 12, 14\},$$
$$C = \{1, 3, 8, 10, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = \overline{A\setminus B}\setminus\overline{C}.$$

7.

$$A = \{1, 2, 3, 5, 8, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 7, 9, 10, 12, 13\},$$
$$C = \{1, 2, 8, 11, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = (\overline{A} \cup \overline{B})\setminus(A \cap \overline{C}).$$

8.

$$A = \{6, 7, 10, 12, 15\},$$
$$B = \{6, 9, 10, 11, 13\},$$
$$C = \{6, 7, 8, 9, 11, 13\}.$$
$$\mathrm{M} = \left(A \cup \overline{C}\right) \cap (A\setminus B).$$

9.

$$A = \{3, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{2, 8, 9, 10, 12\},$$
$$C = \{2, 8, 10, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (\overline{A}\setminus C)\setminus(B\setminus C).$$

10.

$$A = \{0, 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 8, 9, 10, 12\},$$
$$C = \{0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (A\setminus B) \cup (A\setminus\overline{C}) = A \cap \overline{B\setminus C}.$$

11.

$$A = \{1, 2, 3, 7, 8, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 8, 9, 10, 12, 13\},$$
$$C = \{1, 2, 7, 11, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = (\overline{A}\setminus\overline{B})\setminus(A \cup \overline{C}).$$

12.

$$A = \{1, 2, 3, 7, 8, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 8, 9, 10, 12, 13\},$$
$$C = \{1, 2, 7, 11, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = \overline{A}\setminus\overline{B \cap C}.$$

13.

$$A = \{0, 1, 5, 6, 9, 10, 13, 15\},$$
$$B = \{0, 1, 6, 9, 12\},$$
$$C = \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (A \backslash \overline{B}) \backslash (\overline{A} \cup \overline{C}).$$

14.

$$A = \{6, 7, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{2, 7, 9, 10, 12\},$$
$$C = \{3, 8, 10, 11, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = \overline{A} \backslash \overline{B \cap C}.$$

15.

$$A = \{0, 1, 5, 6, 9, 10, 13, 15\},$$
$$B = \{0, 5, 6, 9, 12\},$$
$$C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15\}.$$
$$\mathrm{M} = (A \backslash \overline{B}) \cup (A \backslash \overline{C}).$$

16.

$$A = \{1, 2, 3, 7, 8, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 4, 8, 9, 10, 12, 13\},$$
$$C = \{1, 2, 7, 11, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = (A \cup B) \backslash (\overline{A} \cap \overline{C}).$$

17.

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9, 11\},$$
$$B = \{2, 5, 9, 10, 11\},$$
$$C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}.$$
$$\mathrm{M} = (A \backslash C) \cap \left(\overline{A} \cap B\right).$$

18.

$$\mathrm{A} = \{4, 5, 6, 7, 12, 15\},$$
$$\mathrm{B} = \{4, 5, 6, 9, 11\},$$
$$\mathrm{C} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}.$$
$$\mathrm{M} = \left(A \cap \overline{C}\right) \backslash (A \cap B).$$

19.

$$A = \{2, 6, 10, 11, 12, 13, 15\},$$
$$B = \{1, 2, 7, 9, 10, 12, 14\},$$
$$C = \{1, 3, 8, 10, 12, 14\}.$$
$$\mathrm{M} = (B \backslash A) \cap (\overline{C} \backslash A).$$

20.
$$
\begin{aligned}
&A = \{2, 3, 5, 7, 10, 15\}\,, \\
&B = \{2, 5, 6, 10, 11\}\,, \\
&C = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15\}\,. \\
&\mathrm{M} = (A \cup C) \setminus \left(\overline{A} \cap B\right).
\end{aligned}
$$

21.
$$
\begin{aligned}
&A = \{6, 7, 11, 12, 13, 15\}\,, \\
&B = \{2, 7, 9, 10, 12\}\,, \\
&C = \{3, 8, 10, 11, 14\}\,. \\
&\mathrm{M} = \overline{(\overline{B} \setminus A) \cup (C \setminus A)}.
\end{aligned}
$$

22.
$$
\begin{aligned}
&A = \{2, 3, 7, 8, 12, 13, 15\}\,, \\
&B = \{1, 4, 8, 9, 10, 12, 13\}\,, \\
&C = \{1, 2, 7, 11, 12, 14\}\,. \\
&\mathrm{M} = (C \setminus A) \cup (C \setminus \overline{B}).
\end{aligned}
$$

23.
$$
\begin{aligned}
&A = \{0, 1, 5, 6, 9, 10, 13, 15\}\,, \\
&B = \{0, 5, 6, 9, 12\}\,, \\
&C = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15\}\,. \\
&\mathrm{M} = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).
\end{aligned}
$$

24.
$$
\begin{aligned}
&A = \{2, 3, 7, 8, 12, 13, 15\}\,, \\
&B = \{1, 4, 8, 9, 10, 12, 13\}\,, \\
&C = \{1, 2, 7, 11, 12, 14\}\,. \\
&\mathrm{M} = \overline{A \setminus B} \setminus \overline{C}.
\end{aligned}
$$

25.
$$
\begin{aligned}
&A = \{1, 5, 6, 9, 12, 15\}\,, \\
&B = \{0, 5, 7, 9, 12\}\,, \\
&C = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}\,. \\
&\mathrm{M} = (A \setminus B) \cup (A \setminus \overline{C}).
\end{aligned}
$$

Задание III. Элементы комбинаторики.

1. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры одинаковы?

2. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры больше 5?

3. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых произведение цифр меньше 16?
4. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых сумма цифр меньше 6?
5. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых сумма цифр не больше 6?
6. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых произведение цифр больше 16?
7. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры меньше 5?
8. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр четна?
9. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр равна 9?
10. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр делится на 3?
11. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр нечетна?
12. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр равна 5?
13. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр равна 0?
14. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр делится на 5?
15. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых все цифры делятся на 2?
16. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых все цифры делятся на 2 и только одна цифра делится на 3?
17. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых все цифры делятся на 3?

18. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры делятся на 3 и только одна цифра делится на 2?

19. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры делятся на 2 и только одна цифра делится на 3?

20. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых хотя бы одна из цифр делится на 6?

21. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры делятся на 6?

22. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только две цифры делятся на 2?

23. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только одна цифра делятся на 2, только одна цифра делится на 3 и только одна цифра делится на 5?

24. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых только одна цифра делятся на 2 и только одна другая цифра делится на 5?

25. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых все цифры попарно различны?

Задание IV. Алгебра вероятностей.

1. Брошены три игральные кости. Какова вероятность того, что на всех выпавших гранях появится одно и то же число очков?

2. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,9. Какова вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта?

3. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,8. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий оба изделия окажутся стандартными?

4. На книжной полке имеется семь учебников по химии, из которых три новых. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Какова вероятность того, что оба учебника новые?

5. В ящике 12 деталей, среди которых шесть окрашенных. Наудачу извлечены четыре детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных все детали окажутся неокрашенными?
6. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных?
7. В ящике 10 деталей, из них 2 бракованных. Наудачу извлечены три детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных?
8. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Какова вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными?
9. Брошены три игральные кости. Какова вероятность того, что на двух выпавших гранях появится одно очко, а на третьей грани - другое число очков?
10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта?
11. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0,9. Какова вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное?
12. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три новых. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Какова вероятность того, что оба учебника новые?
13. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Наудачу извлечены четыре детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных все детали окажутся окрашенными?
14. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей нет годных?
15. В ящике 10 деталей, из них 1 бракованная. Наудачу извлечены три детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованной?
16. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Какова вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными?

17. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго - 0,8, для третьего - 0,9. Определить вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель.

18. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго - 0,8, для третьего - 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

19. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что один из вынутых шаров белый, а другой - черный?

20. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

21. Определить вероятность того, что при десяти подбрасываниях монеты герб выпадет не больше двух раз.

22. Определить вероятность того, что при десяти подбрасываниях монеты герб выпадет не меньше двух раз.

23. Определить вероятность того, что при десяти подбрасываниях монеты герб выпадет четыре раза.

24. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8 и 0,9. Определите вероятность того, что не один стрелок не попадет в цель.

25. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8 и 0,9. Определите вероятность того, что только один стрелок не попадет в цель.

Задание V. Основные теоремы вероятности.

а) Два стрелка стреляют по мишени. Вероятности их попадания соответственно равны $\frac{50+n}{100}$ и $\frac{60+n}{100}$. Найти вероятность поражения мишени, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу.

б) Имеется три корзины с шарами. В первой $n+3$ белых и $n+5$ черных, во второй $n+1$ белых и $n+2$ черных, в третьей $n+2$ белых и n черных шаров. Наугад выбирают корзину и выбирают из неё шар. Найти вероятность того, что он окажется белым. Какова вероятность, что это белый шар был выбран из первой корзины?

Задание VI. Дискретные случайные величины.

Найдите математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ для дискретной случайной величины X, заданной следующим законом распределения:[4]

x_i	$m+n-1$	$m+n$	$2m+n$	$2m+n+1$	$3m+2n$
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Задание VII. Статистические оценки параметров распределения.

Найдите выборочную среднюю $\overline{x_B}$, выборочную дисперсию D_B и выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B по данному распределению выборки:

x_i	m	$m+n$	$2m+n$	$3m+n$	$3m+2n$
n_i	2	3	2	2	1

Найдите моду M_0, медиану m_e, размах варьирования R и среднее абсолютное отклонение ϑ данного вариационного ряда.

11.2 Пример решения варианта контрольной работы

Задание I. Доказать равносильность

$$p \Rightarrow \neg(q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow \neg r)$$

с помощью таблицы истинности и с помощью преобразований.

Решение. 1. Сначала составим таблицу истинности для формул $A = p \Rightarrow \neg(q \wedge r)$ и $B = (p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow \neg r)$.

p	q	r	$q \wedge r$	$\neg(q \wedge r)$	A	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	B
И	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	И	И	Л	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И	И	И	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	Л	И	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И	И
Л	И	Л	Л	И	И	Л	И	И	И	И
Л	Л	И	Л	И	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И	И	И	И	И	И

[4] Перед выполнением этого и следующего задания необходимо заменить буквы m и n конкретными числовыми значениями, выданными преподавателем.

Сравнивая построчно истинностные значения формул A и B, убеждаемся в том, что эти формулы равносильны.

2. Теперь преобразуем формулу B к формуле A с помощью свойств логических операций:

$$(p \Rightarrow \neg q) \vee (p \Rightarrow \neg r) \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee \neg r) \equiv \\ \neg p \vee (\neg q \vee \neg p) \vee \neg r \equiv \neg p \vee (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv \\ \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \equiv \neg p \vee \neg(q \wedge r) \equiv p \Rightarrow \neg(q \wedge r).$$

Задание II. Дано универсальное множество

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

и три его подмножества

$$A = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}, \\ B = \{3, 5, 9, 10, 11\}, \\ C = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 15\}.$$

Найти множество

$$(A \backslash C) \cup \left(\overline{A} \cup B\right).$$

Решение. Выполним указанные действия:
1. $A \setminus C = \{2, 4, 6\}$;
2. $\overline{A} = \{1, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$;
3. $\overline{A} \cup B = \{1, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$;
4. $(A \backslash C) \cup \left(\overline{A} \cup B\right) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Задание III. Сколько существует трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр не больше пяти?

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — десятичная запись произвольного трехзначного числа (черта, поставленная сверху, служит для того, чтобы отличать десятичную запись от произведения). По условию задачи должно выполняться неравенство

$$a + b + c \leqslant 5.$$

Очевидно, что $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, причем $a \neq 0$. Обозначим через M множество всех трехзначных натуральных чисел, у которых сумма цифр не больше пяти. Тогда множество M можно представить в виде объединения пяти попарно непересекающихся множеств:

$$M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$$

где

$$A_1 = \{\overline{1bc} | b + c \leqslant 4\},$$
$$A_2 = \{\overline{2bc} | b + c \leqslant 3\},$$
$$A_3 = \{\overline{3bc} | b + c \leqslant 2\},$$
$$A_4 = \{\overline{4bc} | b + c \leqslant 1\},$$
$$A_5 = \{\overline{5bc} | b + c \leqslant 0\}.$$

Множество A_1 можно представить в виде объединения пяти попарно непересекающихся множеств:

$$A_1 = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4,$$

где

$$B_0 = \{\overline{10c} | c \leqslant 4\},$$
$$B_1 = \{\overline{11c} | c \leqslant 3\},$$
$$B_2 = \{\overline{12c} | c \leqslant 2\},$$
$$B_3 = \{\overline{13c} | c \leqslant 1\},$$
$$B_4 = \{\overline{14c} | c \leqslant 0\}.$$

Согласно обобщенному правилу суммы имеем

$$|A_1| = |B_0| + |B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

Аналогично подсчитывем количества элементов в остальных множествах:

$$|A_2| = 4 + 3 + 2 + 1 = 10,$$
$$|A_3| = 3 + 2 + 1 = 6,$$
$$|A_4| = 2 + 1 = 3,$$
$$|A_5| = 1.$$

Снова пользуемся обобщенным правилом суммы:

$$|M| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35.$$

Задание IV. В первой урне находятся 12 шаров, из которых белых только 8 шаров, а во второй урне 15 шаров, из которых только 6 белых шаров. Из каждой урны неглядя вынули по одному шару. Какова вероятность того, что только один из них окажется белым?

Решение. Обозначим через A интересующее нас событие. Тогда очевидно, что белый шар может быть взят либо из первой урны (событие A_1), либо из второй (событие A_2). Если наступило событие A_1, то очевидно, что событие A_2 не наступило (иначе будет два белых шара), а значит наступило противоположное ему событие $\overline{A_2}$. Аналогично, если наступило событие A_2, то наступило событие $\overline{A_1}$. Отсюда следует, что событие A может наступить лишь при наступлении одного из событий $A_1\overline{A_2}$ или $\overline{A_1}A_2$, а значит:

$$A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2.$$

Ясно, что события $A_1\overline{A_2}$ и $\overline{A_1}A_2$ несовместны и потому можно воспользоваться свойством 4) вероятности (см. стр. 60):

$$P(A) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2). \tag{59}$$

Так как шары вынимаются из разных урн, то события A_1 и A_2 являются независимыми. Очевидно, что события A_1 и $\overline{A_2}$ (и события $\overline{A_1}$ и A_2) также являются независимыми. Поэтому можно воспользоваться теоремой 7.4 и получить следующее равенство:

$$P(A) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2). \tag{60}$$

Вычислим вероятности случайных событий A_1 и A_2, воспользовавшись классическим определением вероятности:

$$P(A_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},\ P(A_2) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Вероятности случайных событий $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ найдем по формуле $q = 1 - p$:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},\ P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Подставим найденные значения в формулу (60) и получим ответ:

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

Задание V.

Решение. а) Придадим букве n конкретное числовое значение. Пусть $n = 38$. Тогда вероятности попадания стрелков соответственно равны $0,88$ и $0,98$. Обозначим события A - попадание перового стрелка по мишени, B — попадание второго стрелка по мишени. Тогда искомая вероятность $P(A + B)$. Поскольку события A и B совместны и независимы, то 1-й способ.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) = 0,88 + 0,98 - 0,88\cdot 0,98 = 0,9976.$$

2-й способ.

$$P(A+B) = 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 1-(1-0,88)\cdot(1-0,98) = 1-0,12\cdot 0,02 = 0,9976.$$

Ответ: 0,9976.

б) Придадим букве n конкретное числовое значение. Пусть $n = 16$. Тогда в первой корзине 19 белых и 21 черный шар (всего 40), во второй 17 белых и 18 черных шаров (всего 35), в третьей 18 белых и 16 черных шаров (всего 34). Обозначим события: B_1 — выбрана первая корзина, B_2 — выбрана вторая корзина, B_3 — выбрана третья корзина, A — выбран белый шар. Тогда искомая вероятность события A может быть найдена по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{19}{40}+\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{35}+\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{34} \approx 0,5.$$

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Нужно найти вероятность $P_A(B_1)$. Воспользуемся формулами Байеса.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{19}{40}}{0,5} = 0,32.$$

Ответ: $P(A) = 0,5$; $P_A(B_1) = 0,32$.

Задание VI.

Решение. Придадим буквам m и n конкретные числовые значения. Пусть $m = 7$, $n = 8$. Тогда согласно условию закон распределения вероятностей будет иметь вид:

x_i	14	15	22	23	37
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

Применяя последовательно формулы (35), (37) и (38), получим:

$$M(X) = 14\cdot 0,1+15\cdot 0,3+22\cdot 0,3+23\cdot 0,2+37\cdot 0,1 = 20,8.$$

x_i^2	196	225	484	529	1369
p_i	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

$$M(X^2) = 196\cdot 0,1+225\cdot 0,3+484\cdot 0,3+529\cdot 0,2+1369\cdot 0,1 = 475.$$

$$D(X) = M(X^2)-M^2(X) = 475-432,64 = 42,36.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{42,36} \approx 6,51.$$

Задание VII.

Решение. Воспользуемся теми же значениями букв m и n. Тогда распределение выборки будет иметь вид:

x_i	7	15	22	29	37
n_i	2	3	2	2	1

1. Найдем выборочную среднюю по формуле (52):

$$\overline{x_B} = \frac{7\cdot 2 + 15\cdot 3 + 22\cdot 2 + 29\cdot 2 + 37}{10} = \frac{198}{10} = 19,8;$$

выборочную дисперсию по формуле (53):

$$D_B = \\ = \frac{2\cdot(7-19,8)^2 + 3\cdot(15-19,8)^2 + 2\cdot(22-19,8)^2 + 2\cdot(29-19,8)^2 + (37-19,8)^2}{10} = \\ = \frac{2\cdot 12,8^2 + 3\cdot 4,8^2 + 2\cdot 2,2^2 + 2\cdot 9,2^2 + 17,2^2}{10} = \frac{871,6}{10} = 87,16.$$

и выборочное среднее квадратическое отклонение по формуле (51):

$$\sigma_B = \sqrt{87,16} \approx 9,34.$$

2. Для отыскания моды рассмотрим вторую строку таблицы. Наибольшее число в ней равно трем. В первой строке таблицы этому числу соответствует число 15. Значит $M_0 = 15$. Для отыскания медианы вычислим объем выборки: $n = 2+3+2+2+1 = 10$. Так как число n четно, то медиану вычисляем по формуле (55):

$$m_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{15+22}{2} = 18,5.$$

Размах варьирования находим по формуле (56): $R = 37 - 7 = 30$. Среднее абсолютное отклонение вычисляем по формуле (57):

$$\vartheta = \\ = \frac{2|7-19,8| + 3|15-19,8| + 2|22-19,8| + 2|29-19,8| + |37-19,8|}{10} = \\ = \frac{2\cdot 12,8 + 3\cdot 4,8 + 2\cdot 2,2 + 2\cdot 9,2 + 17,2}{10} = \frac{80}{10} = 8.$$

11.3 Примерная программа зачета

1. Высказывания. Логические операции над высказываниями.
2. Определение формулы логики высказываний. Виды формул логики высказываний. Равносильные формулы. Примеры.
3. Основные свойства логических операций.

4. Предикаты и кванторы. Формулы логики предикатов. Правила построения отрицаний.
5. Понятие множества. Способы задания множеств. Подмножество. Пустое и универсальное множество.
6. Определение операций над множествами.
7. Основные свойства операций над множествами. Свойства операций.
8. Перестановки. Размещения. Сочетания.
9. Правила суммы и произведения.
10. Классификация событий. Действия над событиями. Алгебра событий.
11. Относительная частота случайного события и ее свойства. Статистическое определение вероятности.
12. Классический эксперимент. Классическое определение вероятности случайного события. Свойства вероятности.
13. Условная вероятность. Вычисление вероятности произведения двух и более случайных событий.
14. Независимость событий. Правило умножения независимых событий.
15. Вычисление вероятности суммы двух случайных событий.
16. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
17. Схема испытаний Бернулли. Формула Бернулли.
18. Закон распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение.
19. Математическое ожидание дискретной случайной величины и его вероятностный смысл. Свойства математического ожидания.
20. Дисперсия дискретной случайной величины, ее вычисление и свойства. Среднее квадратическое отклонение.
21. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

22. Закон нормального распределения вероятностей и его числовые характеристики.
23. Элементы математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Полигон и гистограмма. Выборочная средняя.
24. Статистический критерий и их виды.
25. t-критерий Стьюдента и его применения в вашей специальности.
26. Критерий Вилкоксона и его применение в вашей специальности.

11.4 Критические точки распределения Стьюдента.

$f\backslash\alpha$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
55	1,6730	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,4350
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

11.5 Пограничные значения критерия знаков.

$n_{\text{испр.}}$	Z	$n_{\text{испр.}}$	Z	$n_{\text{испр.}}$	Z	$n_{\text{испр.}}$	Z	$n_{\text{испр.}}$	Z	$n_{\text{испр.}}$	Z
6	6	**11**	10	**16**	13	**21**	16	**26**	20	**31**	22
7	7	**12**	10	**17**	13	**22**	17	**27**	20	**32**	23
8	8	**13**	11	**18**	14	**23**	17	**28**	21	**33**	23
9	8	**14**	12	**19**	15	**24**	18	**29**	21	**34**	24
10	9	**15**	13	**20**	15	**25**	18	**30**	22	**35**	24

11.6 Пограничные значения критерия Вилкоксона

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
	77	84	91	97	104	111	118	125	132	138	145
11	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
	84	91	99	106	114	121	129	134	143	151	158
12	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
	91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171
13	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
	97	106	115	124	132	141	149	158	167	175	184
14	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
	104	114	123	132	141	151	160	171	178	188	197
15	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
	111	121	131	141	151	161	170	180	190	200	210
16	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
	118	129	139	149	160	170	181	191	202	212	222
17	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
	125	136	147	158	171	180	191	202	213	224	235
18	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
	138	143	155	167	178	190	202	213	225	236	248
19	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
	138	151	163	175	188	200	212	224	236	248	261
20	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
	145	158	171	184	197	210	222	235	248	261	273

12 Ответы

Высказывания. Логические операции

11. 4 утверждения; **12.** Иванов; **13.** Борис - Белгород, бухгалтер, Андрей - Архангельск, агроном, Бронислав - Бобруйск, аптекарь; **14.** Света - попугай, Марина и Андрей - кошка, Кирилл и Юра - собака; **15**. Иванов-художник, Андрей-увлекается бальными танцами, Петров- солист хора мальчиков, Сидоров- музыкант;

Множества

7. a) 9; b) 8; c) 7; d) 8; **8.**$\{7, 8, 9, 12\}$.

Элементы комбинаторики

2. 242; **3.** 48; **4.** 90; **5.** 40320; **6.** 8; **7.** 120; **8.** 40; **9.** 6561; **10.** 66; **11.** 125; **12.** 90; **13.** 4096; **14.** 10000; **15.** 20; **16.** 8; 9; **17.** 25; 20; **18.** 1080; **19.** 134; **20.** 26820300; **21.** 287; **22.** 5040; **23.** 36; 30; **24.** 4096; **25.** 3628800; 725760; 725760; **26.** 30; 600; **27.** a) 3584; b) 896; c) 64; d) 1470; e) 1176; **28.** 560; 390; **29.** 1140; 6840: **30.** 1600; 480; **31.** 35; **32.** a) 24; b) 6; c) 12; **33.** 144; 120.

Различные способы определения вероятности

3. 1/90; **4.** 16/5525; **5.** 1/110; **6.** $\pi\sqrt{3}/9$.

Алгебра вероятностей

1. a) 1/25; b) 1/5; c) 1/2; **2.** 1/1260; **3.** 64/125; **4.** 169/330; **5.** 11/36 **6.** 2; **7.** 57/115; **8.** 0.94; **10.** 0.032; **11.** 0,7; **12.** 0,81; **13.** 0,286; **14.** 0,81; 0,18; **15.** 25/29; **16.** 1/495 **17.** 0,107; **18.** 2/3; **19.** 0,0443; **20.** 11/20; **21.** 684/2261; **22.** 0.504; **23.** 0.095; **24.** 33/182; **25.** 7/92; **26.** 1/105; **27.** 0.94; **28.** 79/80; **29.** а) 0.27; б) 0.07; в) 0.93; г) 0.66; **30.** 26/29; **31.** 0.6; **32.** 0.958; **33.** 6/11; **34.** 0.5; **35.** 0.85; **36.** 0,215 **37.** а) 16/43; б) 27/43; **38.** а) 4/7; б) 3/7; **39.** 33/57; **40.** а) 57/347; б) 266/347; в) 24/347; **41.** а) 17/175; б) 1/17.

Случайные величины

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

2.

Y	0	1	2
P	45/91	40/91	6/91

3.

Z	0	1	2	3
P	0.008	0.096	0.384	0.512

4. 2.9; 12.09; 3.48; **5.** M(X)=3.5; D(X)=2.92; $\sigma(X) = 1.71$; M(Y)=0.57; D(Y)=0.38; $\sigma(Y) = 0.61$; M(Z)=2.4; D(Z)=0.48; $\sigma(Z) = 0.69$; **6.** M(X)=2.1; D(X)=0.49; M(Y)=0.7; D(Y)=0.91;

7.

X	0	2	4
P	0.1	0.8	0.1

8. 7; 5.83;

9.

Z	0	1	2	3
P	0.144	0.468	0.332	0.056

M(X)=1.3; D(X)=0.61;

10.

Z	1	2	...	n
P	0.1	0.09	...	$0.1 \cdot (0.9)^{n-1}$

$m_0 = 1$; **11.** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Введение в математическую статистику

7. 21.25; 72.93; 8.54; **8.** a) 35; b) нет; c) 11; **9.** a) 23.5; b) 4; c) 11; d) 11; **10.** a) 6; b) 7; c) 9; **11.** $V_1 = 22.85 > V_2 = 18.44$.

Список литературы

[1] Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа. 1999.– 479 с.

[2] Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа. 1999.– 400 с.

[3] Коробков, С.С. Элементы математической логики и теории множеств [Текст]: учебное пособие / С.С. Коробков; Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург: [б.и.], 1999. – 64 с.

[4] Математика и информатика [Текст]: учеб. пособие для студентов педагогических вузов / Н.Л. Стефанова, В.Д. Будаев, Е.Ю. Яшин и др.; под ред. В.Д. Будаева, Н.Л. Стефановой. – М.: Высш. шк., 2004. – 349 с.

[5] Шакурова З.А. Основы математической статистики для психологов [Текст]: учебное пособие / З.А. Шакурова; Изд-во ЮУрГУ -– Челябинск: [б.и.], 2000. – 35 с.

Учебное издание

Основы математической обработки информации

Бондарь Александр Александрович,
Коробков Сергей Самсонович

Компьютерная верстка: А.А Бондарь, С.С. Коробков

Уральского государственного педагогического университета.
620017 Екатеринбург, пр-т Космонавтов, 26.
E-mail: uspu@uspu.me